Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Тульский государственный университет"

Кафедра физики

Семин В.А., Семина С.М.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическии занятиям
по дисциплине
ФИЗИКА

Электромагнетизм

Тула 2012

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине "физика" "Электромагнетизм" составлены доц. Семиным В.А. и асс. Семиной С.М., обсуждены на заседании кафедры физики ЕНФ
протокол № от " " 2012г.
Зав. кафедрой физики ___________ Д.М. Левин

Методические указания пересмотрены и утверждены на заседании кафедры физики ЕН факультета
протокол № ___ от «____» _________ 200_ г.
Зав. кафедрой физики ___________ Д.М. Левин

1. Цели и задачи практических занятий:

а) Изучение основных физических явлений и идей, овладение фундаментальными понятиями, законами и теориями современной и классической физики, а также методами физического исследования.

б) Формирование научного мировоззрения и современного физического мышления.

в) Овладение приемами и методами решения конкретных задач из различных областей физики.

Объём и сроки выполнения данного вида работ соответствуют учебными планами студентов дневной формы обучения специальностей

020000 естественные науки, 090900 информационная безопасность, 120000 геодезия и землеустройство, 130000 геология, разведка полезных ископаемых, 140000 энергетика, энергетическое машиностроение и электротехника, 150000 металлургия, машиностроение и материалообработка, 160000 авиационная и ракетно-космическая техника, 170000 оружие и системы вооружений, 190000 транспортные средства, 200000 приборостроение и оптотехника, 220000 автоматика и управление, 230000 информатика и вычислительная техника, 240000 химическая и биотехнологии, 260000 технология продовольственных продуктов и потребительских товаров, 270000 строительство и архитектура, 280000 безопасность жизнедеятельности, природообустройство и защита окружающей среды

2. План занятий.

1. Разбор вопросов студентов по домашнему заданию.
2. Решение типовых задач на доске.
3. Самостоятельное решение студентами некоторых задач на занятии и подведение итогов.
4. Формулировка домашнего задания.

3. Темы занятий.

1. Расчет напряжености электрического поля, созданного дискретными и распределенными зарядами.
2. Расчет потенциала электрического поля, созданного дискретными и распределенными зарядами. Расчет напряженности электрического поля при известной функции потенциала $\varphi(x,y)$.

3. Заряд, прошедший через поперечное сечение проводника. Закон Джоуля - Ленца. Законы Ома и правила Кирхгофа.
4. Контрольная работа по темам 1–3.
5. Расчет силы тока через поперечное сечение проводника. Закон Ома в локальной и интегральной форме. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции.
6. Суперпозиция магнитных полей. Виток с током в магнитном поле. Сила Лоренца.
7. Э.Д.С. индукции и самоиндукции. Электрические затухающие и вынужденные колебания.
8. Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны. Вектор Пойнтинга.
9. Контрольная работа по темам 5–8.
10. Дополнительная глава. Использование теоремы Гаусса в дифференциальной и интегральной формах.

4. Электронная версия

http://physics.tsu.tula.ru/students/metodich_files/practich-elmag.pdf

Занятие 1

Расчет напряженности электрического поля, созданного дискретными и распределенными зарядами.

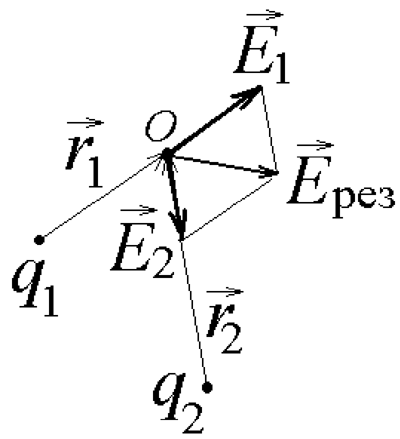


Рис. 1

Точечный заряд q создает вокруг себя электрическое поле с напряженностью

$$E = \frac{kq}{r^2} e_r, \qquad (1.1)$$

где $k = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$, r – расстояние от заряда до точки O, в которой исследуется поле, e_r – единичный вектор, направленный по радиус-вектору r от точечного заряда q до точки O.

Из (1.1) следует, что если заряд q положительный, то напряженность электрического поля E направлена от точки O в ту же сторону, что и вектор e_r. В случае, если заряд q отрицательный, то вектор E направлен противоположно вектору e_r.

Если в пространство поместить два (или несколько) точечных электрических заряда (см. рис.1), то они будут создавать в точке O электрическое поле, напряженность которого $E_{\text{рез}}$ можно найти с помощью *принципа суперпозиции* полей, то есть векторно складывая напряженности полей E_1 и E_2, создаваемые зарядами q_1 и q_2 в точке O независимо друг от друга (метод параллелограмма). Таким образом

$$E_{\text{рез}} = \sum E_i = E_1 + E_2 \qquad (1.2)$$

На рис.1 приведен пример с положительным зарядом q_1 и отрицательным зарядом q_2. В точке O заряд q_1 создает поле, модуль напряженности которого равен $E_1 = \frac{kq_1}{r_1^2}$. Аналогично, заряд q_2 в точке O создает поле, модуль напряженности которого равен $E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2}$. Возводя левую и правую части формулы (1.2) в квадрат, получим выражение

$E_{\text{рез}}^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha$, где α – угол между векторами E_1 и E_2. Таким образом модуль напряженности результирующего поля равен:

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha} \qquad (1.3)$$

Если в пространстве находится три и более электрических заряда, то формулу (1.2) проще всего записать в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} E_{\text{рез}\,x} &= E_{1x} + E_{2x} + E_{3x} + \ldots, \\ E_{\text{рез}\,y} &= E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} + \ldots, \\ E_{\text{рез}\,z} &= E_{1z} + E_{2z} + E_{3z} + \ldots. \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Используя теорему Пифагора и формулы (1.4), можно найти модуль напряженности результирующего поля:

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{E^2_{\text{рез}\,x} + E^2_{\text{рез}\,y} + E^2_{\text{рез}\,z}} \qquad (1.5)$$

Пример задачи.

Заряды q_1 = 1 мкКл и q_2 =2 мкКл находятся на серединах соседних сторон квадрата со стороной b = 1 м и создают электрическое поле с напряженностью $E_{\text{рез}}$ в точке P, находящейся в вершине квадрата (см. рис. 2). Найти величину горизонтальной и вертикальной проекции вектора $E_{\text{рез}}$, а также его модуль $|E_{\text{рез}}|$

Решение:

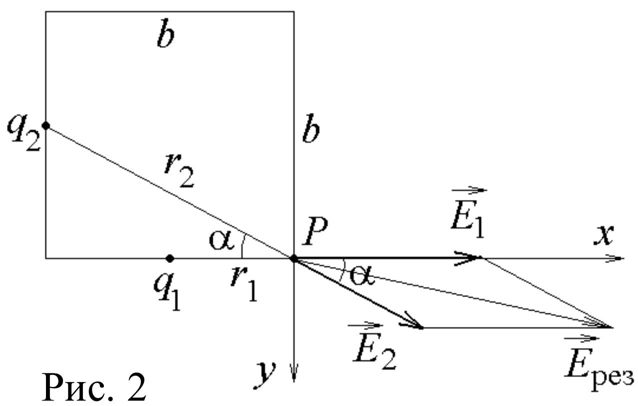


Рис. 2

Проведем оси x и y вдоль двух сторон квадрата, а начало отсчета поместим в точку P. Расстояния от зарядов q_1 и q_2 до точки P равны $r_1 = \dfrac{b}{2} = 0{,}5$ м,

$r_2 = \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + b^2} = b\dfrac{\sqrt{5}}{2} = 0{,}5\cdot\sqrt{5}$ м.

Можно найти косинус и синус угла α:

$$\cos\alpha = \frac{b}{r_2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,; \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Воспользуемся формулами (3.4) и (3.5), а затем и (3.7):

$$E_{\text{рез}\,x} = E_1 + E_2\cos\alpha = \frac{kq_1}{r_1^2} + \frac{kq_2}{r_2^2}\cos\alpha = 9\cdot10^9\cdot\left(\frac{10^{-6}}{0{,}5^2} + \frac{2\cdot10^{-6}}{0{,}5^2\cdot5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 48{,}9\ \text{кВ/м}$$

$$E_{\text{рез}\,y} = E_2\sin\alpha = \frac{kq_2}{r_2^2}\sin\alpha = \frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-6}}{0{,}5^2\cdot5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = 6{,}43\ \text{кВ/м}$$

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{E_{\text{рез}\,x}^2 + E_{\text{рез}\,y}^2} = \sqrt{48{,}9^2 + 6{,}43^2} = 49{,}3\ \text{кВ/м}$$

Модуль вектора $\left|E_{\text{рез}}\right|$ можно найти с помощью формулы (3.3), не находя его проекции:

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{\left(\frac{kq_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{kq_2}{r_2^2}\right)^2 + 2\frac{kq_1}{r_1^2}\frac{kq_2}{r_2^2}\cos\alpha} =$$

$$= 9\cdot10^9\cdot10^{-6}\sqrt{\left(\frac{1}{0{,}5^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{0{,}5^2\cdot5}\right)^2 + 2\frac{1}{0{,}5^2}\frac{2}{0{,}5^2\cdot5}\frac{2}{\sqrt{5}}} = 49{,}3\ \text{кВ/м}$$

Ответ: $E_{\text{рез}\,x} = 48{,}9$ кВ/м; $E_{\text{рез}\,y} =$ 6,43 кВ/м; $\left|E_{\text{рез}}\right| = 49{,}3$

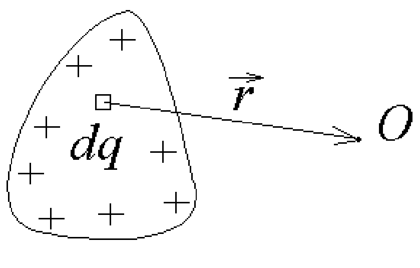


Рис.3

Электрическое поле часто создается не дискретными зарядами, а распределенными в пространстве. В разных ситуациях можно встретить распределение заряда по объему, поверхности или по тонкой линии, при этом вводятся п**лотности** электрического заряда:

объемная – $\rho = \dfrac{dq}{dV}$, **поверхностная** – $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$, **линейная** – $\lambda = \dfrac{dq}{dl}$,

где dq – элементарный заряд, который может быть распределен или по объему dV, или по поверхности dS, или на участке линии dl.

В любом из этих случаев необходимо разбить заряженную область на малые элементы и выразить их заряд через плотность, например $dq = \rho dV$ для объемного распределения (см. рис.3). В этом случае применение принципа суперпозиции (1.2) для нахождения напряженности электрического поля E в векторной форме вызывает большие трудности из-за бесконечного числа элементарных зарядов dq, распределенных в пространстве. В этом случае необходимо воспользоваться не векторным сложением вкладов полей dE, а сложением их проекций :

$$E_x = \int dE_x , \quad E_y = \int dE_y \tag{1.6}$$

и далее по формуле (1.5) найти результирующую напряженность.

Пример задачи

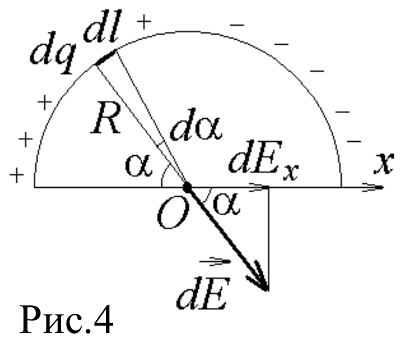


Рис.4

Заряд распределен по тонкому полукольцу радиуса R = 1 м с линейной плотностью

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_0 \sin^3 \alpha, & 0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \\ \lambda = -\lambda_0 \sin^3 \alpha, & \dfrac{\pi}{2} < \alpha \le \pi \end{cases}.$$

Определить проекцию на ось x напряженности электрического поля, создаваемого этим зарядом в центре полукольца, если λ_0 = 1 мкКл/м.

Решение:

Как видно из рис.4, проекция на ось x напряженности электрического поля, созданного элементарным зарядом $dq = \lambda dl$ в точке O равна:

$$dE_x = dE \cdot \cos\alpha$$

Учитывая, что $dl = Rd\alpha$, а $\cos\alpha d\alpha = d(\sin\alpha)$, получим

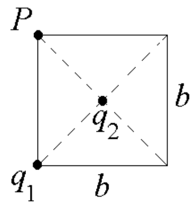
$$E_x = \int \frac{k\lambda dl}{r^2}\cos\alpha = \int_0^{\pi/2} \frac{k\lambda_0 \sin^3\alpha}{R^2}\cos\alpha R d\alpha - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{k\lambda_0 \sin^3\alpha}{R^2}\cos\alpha R d\alpha =$$

$$= \frac{k\lambda_0}{R}\left(\left.\frac{\sin^4\alpha}{4}\right|_0^{\pi/2} - \left.\frac{\sin^4\alpha}{4}\right|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{k\lambda_0}{4R}\left(1-(-1)\right) = \frac{k\lambda_0}{2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{2} = 4500\,\text{В/м}$$

Ответ: 4,5 кВ/м

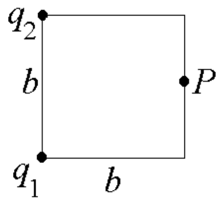
Задачи для работы на практическом занятии.

1.1 Заряд q_1 = 1 мкКл находится в вершине квадрата со стороной b =1 м, а заряд q_2 =2 мкКл – в центре. Найти модуль напряженности электрического поля в точке P, находящейся в другой вершине этого квадрата (см. рис.).

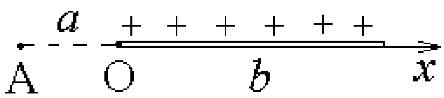


Ответ: 42,8 кВ/м

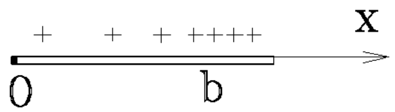
1.2 Заряды q_1 = 1 мкКл и q_2 = – 2 мкКл находятся в соседних вершинах квадрата со стороной b = 50 см. Найти величину горизонтальной проекции напряженности электрического поля в точке P, находящейся на середине противоположной стороны квадрата (см. рис.).



Ответ: 25,8 кВ/м

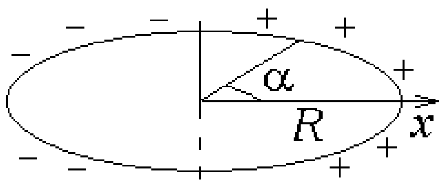


1.3 Вдоль стержня длины b = 80 см равномерно распределен заряд q = 4 мкКл. Найти величину напряженности электрического поля в точке A на продолжении стержня на расстоянии a = 20 см от его конца (см. рис.). Ответ: 180 кВ/м



1.4 Тонкий стержень заряжен неравномерно. Электрический заряд распределен по нему с линейной плотностью $\lambda = A \cdot x^2$, $0 \le x \le b$, где x - координата точки на стержне, b =3 м – длина стержня, A = 2 мкКл/м^3. Чему равна величина напряженности электрического поля, создаваемого этим зарядом в начале координат O, совпадающем с концом стержня?

Ответ: 54 кВ/м

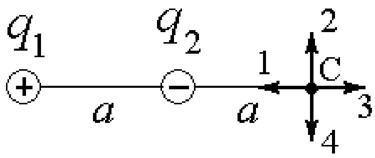


1.5 Заряд распределен по тонкому кольцу радиуса R с линейной плотностью

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_0 \sin^2 \alpha, & -\pi/2 \le \alpha \le \pi/2 \\ \lambda = -\lambda_0 \sin^2 \alpha, & \pi/2 < \alpha < 3\pi/2 \end{cases}.$$

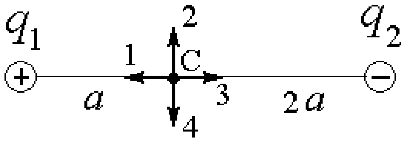
Определить величины проекций напряженности электрического поля в центре кольца на оси x и y, проведенных по двум перпендикулярным диаметрам, если R = 2 м, λ_0 = 5 мкКл/м.

Ответ: E_x = 30 кВ/м, E_y = 0



1.6э. Электрическое поле создано точечными зарядами q_1 и q_2. Если $q_1 = +q$, $q_2 = –q$, а расстояние между зарядами и от q_2 до точки С равно a, то вектор напряженности поля в точке С ориентирован в направлении ...

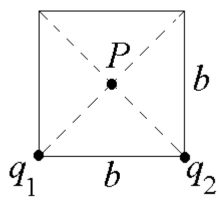
а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) равен 0



1.7э. Электрическое поле создано точечными зарядами q_1 и q_2. Если $q_1 = +q$, $q_2 = –q$, точка С находится на расстоянии a от заряда q_1 и на расстоянии $2a$ от q_2, то вектор напряженности поля в точке С ориентирован в направлении ...

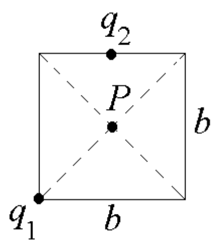
а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) равен 0

Задачи для самостоятельной работы.



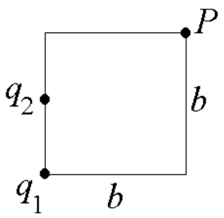
1.8с. Заряды q_1 = 2 мкКл и q_2 = 3 мкКл находятся в соседних вершинах квадрата со стороной b=1,5 м. Найти модуль напряженности электрического поля в точке Р, находящейся в центре квадрата (см. рис.).

Ответ: 28,8 кВ/м



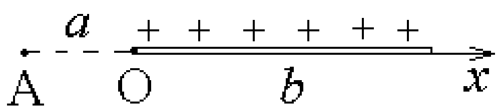
1.9с. Заряд q_1 = 4 мкКл находится в вершине квадрата со стороной b = 60 см, а заряд q_2 = – 3 мкКл – на середине стороны. Найти модуль напряженности электрического поля в точке Р, находящейся в центре квадрата (см. рис.).

Ответ: 212,5 кВ/м



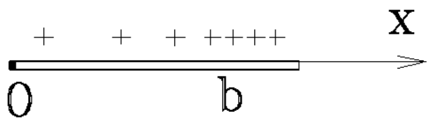
1.10с. Заряд q_1 = 3 мкКл находится в вершине квадрата со стороной b = 90 см, а заряд q_2 = – 1 мкКл – на середине стороны. Найти **величину вертикальной проекции** напряженности электрического поля в точке Р, находящейся в противоположной вершине квадрата (см. рис.).

Ответ: 7,81 кВ/м



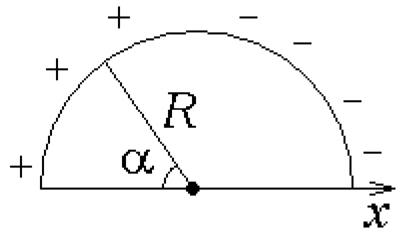
1.11c. Вдоль стержня длины b = 40 см равномерно распределен заряд с линейной плотностью λ = 250 нКл/м . Найти величину напряженности электрического поля в точке A на продолжении стержня на расстоянии a =10 см от его конца (см. рис.).

Ответ: 18 кВ/м



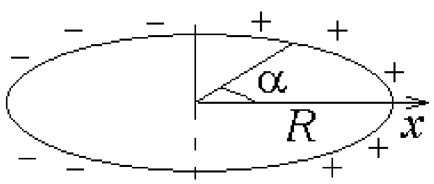
1.12c. Тонкий стержень заряжен неравномерно. Электрический заряд распределен по нему с линейной плотностью $\lambda = A \cdot x^3$, $0 \le x \le b$, где x – координата точки на стержне, b = 4 м – длина стержня, A = 3 мкКл/м^4. Чему равна величина напряженности электрического поля, создаваемого этим зарядом в начале координат O, совпадающем с концом стержня?

Ответ: 216 кВ/м



1.13c. Заряд распределен по тонкому полукольцу радиуса R = 120 см с линейной плотностью $\begin{cases} \lambda = \lambda_0 \cos^2\alpha, & 0 \le \alpha \le \pi/2 \\ \lambda = -\lambda_0 \cos^2\alpha, & \pi/2 < \alpha \le \pi \end{cases}$.
Определить проекцию на ось x напряженности электрического поля, создаваемого этим зарядом в центре полукольца, если λ_0 = 400 нКл.

Ответ: 4 кВ/м



1.14c. Заряд распределен по тонкому кольцу радиуса R = 30 см с линейной плотностью

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_0 \sin^4\alpha, & -\pi/2 \le \alpha \le \pi/2 \\ \lambda = -\lambda_0 \sin^4\alpha, & \pi/2 < \alpha < 3\pi/2 \end{cases}.$$

Определить величину проекции на ось x напряженности электрического поля, создаваемого этим зарядом в центре кольца, если, λ_0 = 3 мкКл/м.

Ответ: 72 кВ/м

Занятие 2.

Расчет потенциала электрического поля, созданного дискретными и распределенными зарядами. Расчет напряженности электрического поля при известной функции потенциала φ(*x*, *y*).

Электростатическое поле точечного заряда характеризуется не только вектором напряженности E (см. (1.1)), но и потенциалом φ:

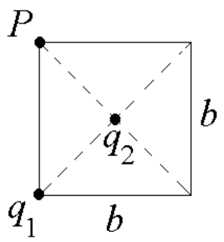
$$\varphi = \frac{kq}{r}. \qquad (2.1)$$

Из (2.1) видно, что потенциал – это скалярная величина, которая может быть как положительная, так и отрицательная в зависимости от знака заряда.

Используя *принцип суперпозиции* полей, можно найти потенциал результирующего электрического поля в заданной точке *O* как алгебраическую сумму потенциалов полей, созданных каждым зарядом независимо друг от друга (см. рис. 1):

$$\varphi_{\text{рез}} = \sum \varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + \ldots \qquad (2.2)$$

Пример задачи.



Заряд q_1 = 1,2 мкКл находится в вершине квадрата со стороной b = 2 м, а заряд q_2 = – 5 мкКл– в центре. Найти потенциал электрического поля в точке Р, находящейся в другой вершине этого квадрата (см. рис.).

Решение:

Найдем из рисунка $r_1 = b = 2$ м, $r_2 = b/\sqrt{2}$ = 1,41 м и подставим данные в формулу (2.2):

$$\varphi_{\text{рез}} = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{1,2 \cdot 10^{-6}}{2} + \frac{(-5) \cdot 10^{-6}}{1,41} \right) = -26,5 \text{ кВ}$$

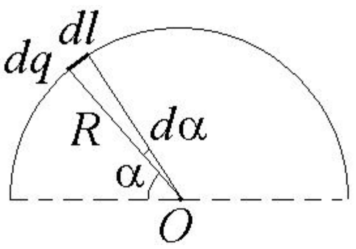
Ответ: $\varphi_{\text{рез}} = -26,5$ кВ

Для рассчета потенциала электрического поля, созданного распределенным зарядом с известной функцией объемной, поверхностной или линейной плотности заряда, применим принцип суперпозиции (2.2) в виде

$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{kdq}{r} \tag{2.3}$$

– где r – расстояние от малого элемента с зарядом dq до точки O (см. рис.3), $dq = \rho dV$ для объемного распределения, $dq = \sigma dS$ для распределения по поверхности или $dq = \lambda dl$ для распределения по тонкой линии.

Пример задачи.



Положительный заряд распределен по тонкому полукольцу радиуса R = 1 м с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2$, где $0 < \alpha < \pi$, λ_0 = 1 мкКл/м. Определить потенциал, создаваемый этим зарядом в центре полукольца.

Решение:

Выделим элемент $dl = Rd\alpha$ на полуокружности и, учитывая, что расстояние от элемента до точки O равно $r = R$, по формуле (2.3) рассчитаем потенциал в точке O:

$$\varphi = \int_L \frac{k\lambda dl}{r} = \frac{k\lambda_0}{R}\int_0^{\pi}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 Rd\alpha = \frac{k\lambda_0}{\pi^2}\frac{\alpha^3}{3}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{k\lambda_0\pi}{3} = \frac{9\cdot 10^9 . 10^{-6}\cdot 3{,}14}{3} = 9{,}42 \text{ кВ}$$

Ответ: 9,42 кВ

Пример задачи.

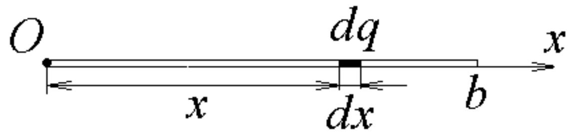


Рис.5

Тонкий стержень заряжен неравномерно. Электрический заряд распределен по нему с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \left(\frac{x}{b} \right)^2$, где x – координата точки на стержне, b = 1 м – длина стержня, λ_0 = 1 мкКл/м. Чему равна величина потенциала, создаваемого этим зарядом в начале координат О, совпадающем с концом стержня?

Решение:

Выделим элементарный заряд dq на стержне длиной dx на расстоянии x от начала координат O (см. рис.5). Учитывая, что $r = x$, а $dq = \lambda dx$, найдем по формуле (2.3) потенциал в точке O:

$$\int_L \frac{k\lambda dl}{r} = \int_0^b \frac{k\lambda_0 \left(\frac{x}{b} \right)^2 dx}{x} = \frac{k\lambda_0}{b^2} \frac{x^2}{2} \bigg|_0^b = \frac{k\lambda_0}{2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{2} = 4{,}5 \text{ кВ}$$

Ответ: 4,5 кВ

Рассмотрим пробную частицу с электрическим зарядом q_0, находящуюся в электростатическом поле с напряженностью E и обладающую потенциальной энергией W. Как известно, электростатическое поле потенциально, следовательно работа поля по перемещению частицы равна убыли потенциальной энергии:

$$dA = F \cdot dr = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dW \qquad (2.4)$$

Из (2.4) можно сделать выводы относительно проекций силы, действующей на частицу:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial W}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial W}{\partial z}, \qquad (2.5)$$

где $\partial W / \partial x$; $\partial W / \partial y$; $\partial W / \partial z$ – частные производные по x, y, z.

Представим силу в векторном виде:

$$F = iF_x + jF_y + kF_z = -\left(i\,\frac{\partial W}{\partial x} + j\,\frac{\partial W}{\partial y} + k\,\frac{\partial W}{\partial z} \right) = -\operatorname{grad} W\ . \qquad (2.6)$$

Градиент энергии взаимодействия частицы с полем $\operatorname{grad} W = \nabla W$,

где – $\nabla = i\,\dfrac{\partial}{\partial x} + j\,\dfrac{\partial}{\partial y} + k\,\dfrac{\partial}{\partial z}$ – дифференциальный оператор "набла".

Разделим уравнение (2.6) на q_0 и, учитывая, что $\dfrac{F}{q_0} = E$, а $\dfrac{W}{q_0} = \varphi$,

получим связь между напряженностью электростатического поля E и электрическим потенциалом φ:

$$E = -\operatorname{grad}\varphi = -\left(i\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + j\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + k\,\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \qquad (2.7)$$

где $\operatorname{grad}\varphi$ это вектор, направленный в сторону наибыстрейшего *возрастания* потенциала.

Эквипотенциальной поверхностью называется поверхность в силовом поле, в каждой точке которой потенциал одинаков. Таким образом, если частица q_0 перемещается по эквипотенциальной поверхности, то ее потенциальная энергия не изменяется, и работа над частицей в этом случае не совершается. Из (2.4) следует, что сила, действующая на частицу перпендикулярна перемещению, а значит и эквипотенциальной поверхности.

Из (2.7) можно сделать вывод, что *напряженность E направлена в сторону наибыстрейшего убывания потенциала φ перпендикулярно эквипотенциальной поверхности.*

Используя формулу (2.7) можно рассчитать проекции вектора E:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \ E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},\ \ E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\,. \qquad (2.8)$$

Модуль вектора E можно найти по формуле:

$$\left| E \right| = E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \qquad (2.9)$$

Пример задачи.

Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = Ax^{10}y^{10}$. Найти величину напряженности электрического поля в точке $P(x_0, y_0)$, если A = 2 В/м^{20}, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м.

Решение:

По формуле (2.8) рассчитаем проекции вектора напряженности E:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(Ax^{10}y^{10}\right) = -Ay^{10}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{10}\right) = -10Ay^{10}x^9,$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(Ax^{10}y^{10}\right) = -Ax^{10}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{10}\right) = -10Ax^{10}y^9,$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial z} = 0.$$

Подставляя значения координат $x = x_0$, $y = y_0$, получаем:

$E_x = -10 \cdot 2 \cdot 2^{10} \cdot 1^9 = -20480$ В/м, $E_y = -10 \cdot 2 \cdot 1^{10} \cdot 2^9 = -10240$ В/м

Результат подставляем в (2.9):

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{(20480)^2 + (10240)^2 + 0} = 22897 \text{ В/м}$$

Ответ: E = 22,9 кВ/м

Пример задачи.

Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = Ax^{10} + By^{15}$. Найти модуль напряженности электрического поля в точке $P(x_0, y_0)$, если A = 2 В/м^{10}, B = 3 В/м^{15}, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м.

Решение:

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(Ax^{10} + By^{15}\right) = -A\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{10}\right) = -10Ax^9,$$

$$E_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(Ax^{10} + By^{15}\right) = -B\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{15}\right) = -15By^{14}, \quad E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\varphi(x, y) = 0.$$

Подставляя значения координат $x = x_0,\ y = y_0$, получаем:

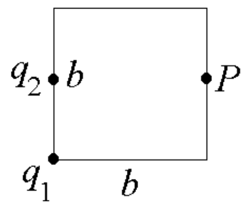
$E_x = -10 \cdot 2 \cdot 1^9 = -20$ В/м, $E_y = -15 \cdot 3 \cdot 2^{14} = -737280$ В/м

Результат подставляем в (2.9):

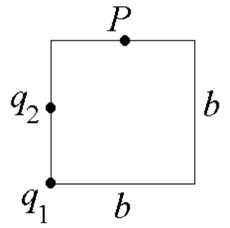
$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{(20)^2 + (737280)^2 + 0} \approx 737280 \text{ В/м}$$

Ответ: E = 737 кВ/м

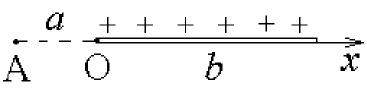
Задачи для работы на практическом занятии.



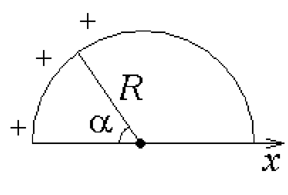
2.1 Заряд q_1 = 1 мкКл находится в вершине квадрата со стороной b = 20 см, а заряд q_2 = 2 мкКл – на середине стороны. Найти потенциал электрического поля в точке P, находящейся на середине противоположной стороны квадрата (см. рис.). Ответ: 130 кВ



2.2 Заряд q_1 = 2 мкКл находится в вершине квадрата со стороной b = 40 см, а заряд q_2 = –3 мкКл – на середине стороны. Найти потенциал электрического поля в точке P, находящейся на середине стороны квадрата (см. рис.). Ответ: – 55,2 кВ



2.3 Вдоль стержня длины b = 40 см равномерно распределен заряд q = 2 мкКл. Найти потенциал в точке A на продолжении стержня на расстоянии a = 60 см от его конца (см. рис.). Ответ: 22,0 кВ



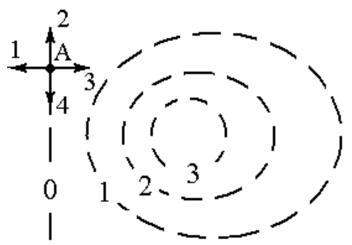
2.4 Положительный заряд распределен по тонкому полукольцу радиуса R = 50 см с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \exp\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right),\ 0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$, λ_0 = 2 мкКл/м. Определить потенциал, создаваемый этим зарядом в центре полукольца. Ответ: 11,7 кВ

2.5 Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = Ax^5y^2$, где A = 4 В/м^7. Найти величину напряженности электрического поля в точке $P(x_0 = 1\ м, y_0 = 2\ м)$. Ответ: 81,6 В/м.

2.6 Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = Ax^4 + By^3$, где A = 2 В/м^4, B = 3 В/м^3. Найти величину напряженности электрического поля в точке $P\left(x_0 = 2\,м, y_0 = 3\,м\right)$.

Ответ: 103 В/м

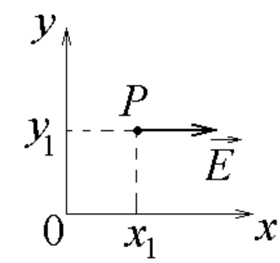
2.7 Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = \sin\left(Ax\right) + B\sin\left(Cy\right)$. Найти величину напряженности электрического поля в точке $P\left(x_0, y_0\right)$. $A = 2$ рад/м, $B = 3$ В, $C = 4$ рад/м, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м.   Ответ: 1,9 В/м



2.8э. На рисунке показаны эквипотенциальные линии системы зарядов и значения потенциала на них. Вектор напряженности электрического поля в точке А ориентирован в направлении...

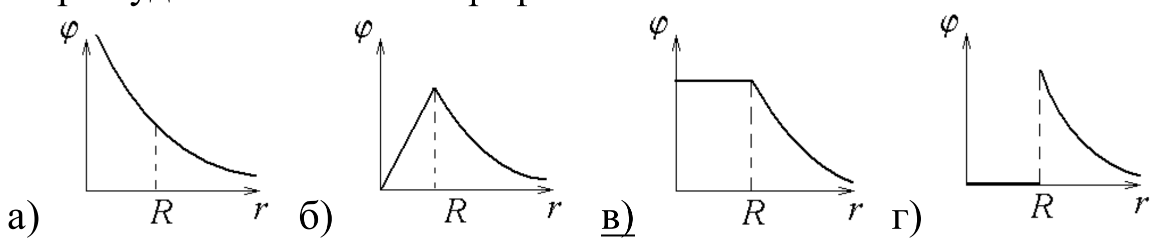
а) 1; б) 2; в) 3; г) 4;

2.9э. В некоторой области пространства создано электростатическое поле, вектор напряженности которого в точке $P(x_1,y_1)$ направлен вдоль оси x. Какая зависимость потенциала электрического поля от координат $\varphi\left(x, y\right)$ может соответствовать такому направлению напряженности?

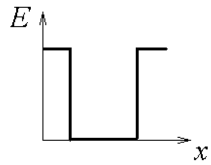


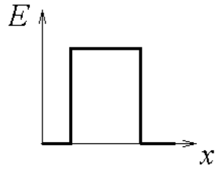
1) $\varphi = -2xy$ 2) $\varphi = 3y^2$ 3) $\varphi = -3x^2$ 4) $\varphi = 4x^4$

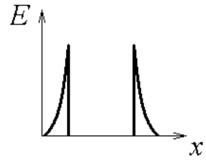
2.10э. На металлический шар поместили положительный заряд Q. Зависимость потенциала электрического поля от расстояния до центра шара будет описываться графиком...

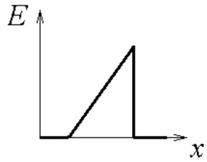


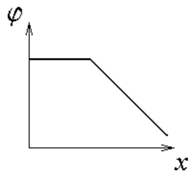
2.11э. Две бесконечные параллельные пластинки равномерно заряжены равными по величине и разноименными по знаку поверхностными плотностями заряда. Если ось X направить перпендикулярно пластинкам, то зависимость величины напряженности электрического поля в зависимости от x будет представлена графиком**...**

а) 

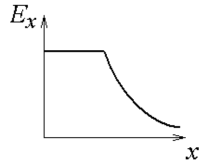
б) 

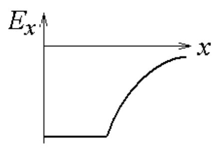
в) 

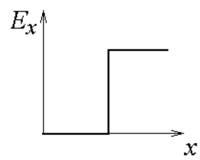
г) 

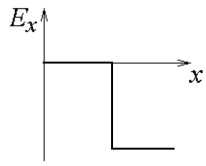


2.12э. Потенциал электрического поля зависит от координаты x, как показано на рисунке. Какой рисунок правильно отражает зависимость проекции напряженности электрического поля от координаты x?

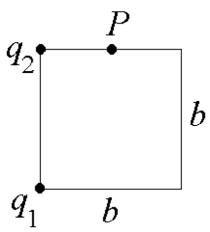
а) 

б) 

в) 

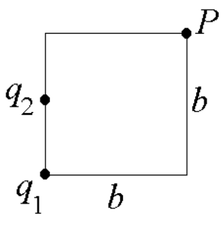
г) 

Задачи для самостоятельной работы.

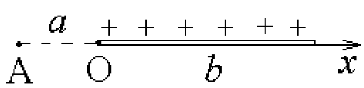


2.13с. Заряды q_1 = 2 мкКл и q_2 = 3 мкКл находятся в соседних вершинах квадрата со стороной b = 20 см. Найти потенциал электрического поля в точке Р, делящей сторону квадрата на два равных отрезка (см. рис.).

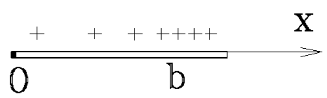
Ответ: 350 кВ



2.14с. Заряд q_1 = 4 мкКл находится в вершине квадрата со стороной b = 40 см, а заряд q_2= – 5 мкКл – на середине стороны. Найти потенциал электрического поля в точке Р, находящейся в противоположной вершине квадрата (см. рис.). Ответ: – 37,0 кВ

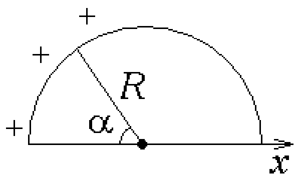


2.15с. Вдоль стержня длины b = 80 см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\lambda = 2$ мкКл/м. Найти потенциал в точке A на продолжении стержня на расстоянии a = 20 см от его конца (см. рис.). Ответ: 29,0 кВ



2.16c Тонкий стержень заряжен неравномерно. Электрический заряд распределен по нему с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 x^5$, $0 \le x \le b$, где x - координата точки на стержне, b = 2 м – длина стержня. Чему равна величина потенциала, создаваемого этим зарядом в начале координат О, совпадающем с концом стержня, если λ_0 = 10 мкКл/м^6?

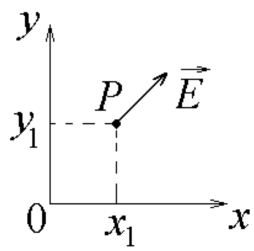
Ответ: 576 кВ



2.17c Положительный заряд распределен по тонкому полукольцу радиуса R = 50 см с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \sin^2\alpha$, $0 \le \alpha \le \pi$. Определить потенциал, создаваемый этим зарядом в центре полукольца, если λ_0 = 1 мкКл/м. Ответ: 14,1 кВ

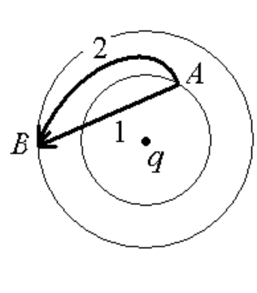
2.18c. Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = 5x^3 + 6y^4$ (В). Найти величину напряженности электрического поля в точке $P(x_0, y_0)$ $x_0 = 3$ м, $y_0 = 2$ м. Ответ: 235 В/м

2.19c. Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = A\exp(Bx) + C\cos(Dy)$. Найти величину напряженности электрического поля в точке $P(x_0, y_0)$. $A = 1$ В, $B = 2$ м$^{-1}$, $C = 3$ В, $D = 4$ рад/м, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м. Ответ: 19,0 В/м;



2.20c. В некоторой области пространства создано электростатическое поле, вектор напряженности которого в точке $P(x_1,y_1)$ направлен под некоторым углом к оси x (см. рис.). Какая зависимость потенциала электрического поля от координат $\varphi(x, y)$ может соответствовать такому направлению напряженности?

1) $\varphi = -4y^3$ 2) $\varphi = -3xy^2$ 3) $\varphi = 5x^2 + 3y^2$ 4) $\varphi = 2x^2$



2.21c. Электрон перемещается в кулоновском поле заряженной частицы из точки А в точку В в одном случае по траектории 1, в другом случае по траектории 2. Как соотносятся величины работ, совершаемых электрическим полем над электроном, в этих двух случаях?

а) $A_1 > A_2$; б) $A_1 < A_2$; в) $A_1 = A_2 = 0$; г) $A_1 = A_2 \ne 0$

Занятие 3.

Заряд, прошедший через поперечное сечение проводника. Закон Джоуля - Ленца. Законы Ома и правила Кирхгофа.

Сила тока определяется, как *заряд, протекающий через поперечное сечение провода за единицу времени*, т.е.

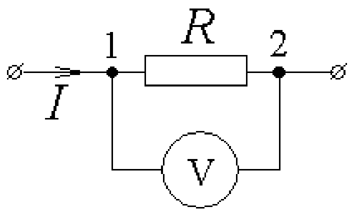
$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{3.1}$$

Если известна зависимость силы тока $I(t)$, то из (3.1) можно выразить заряд, протекающий за малый промежуток времени:

$$dq = Idt, \tag{3.2}$$

и за любой промежуток времени

$$\Delta q = \int_{t_0}^{t_1} Idt \tag{3.3}$$



При перемещении электрического заряда q из точки 1 в точку 2 электрическое поле совершает работу

$$A = -q\Delta\varphi, \tag{3.4}$$

где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ – разность потенциалов.

В законе Ома используют другую величину – напряжение или *падение напряжения*: $U = \varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi$. Таким образом (3.4) можно переписать в другом виде: $A = qU$.

Для малого промежутка времени, используя (3.2), преобразуем (3.4) следующим образом:

$$dA = dqU = IdtU = IUdt = Pdt, \tag{3.5}$$

где $P = IU$ – электрическая мощность.

Используя закон Ома для однородного участка цепи $U = IR$, и подставляя его в (3.5), получим закон Джоуля-Ленца:

$$dQ = dA = I^2Rdt \qquad \text{или} \qquad Q = \int_{t_1}^{t_2} I^2Rdt \tag{3.6}$$

В формуле (3.6) учтено то обстоятельство, что работа электрического поля, совершенная над электрическими зарядами, не приводит к увеличению их кинетической энергии, а выделяется в виде тепла dQ.

Пример задачи.

По проводу сопротивлением R_1 = 20 Ом течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону $I = 5t^{10}$ (А). Чему равно количество тепла, выделившееся в проводе, и количество электричества, прошедшее через сечение провода за промежуток времени от $t_0 = 0$ до t_1 = 2 с?

Решение:

Подставим функцию силы тока от времени в формулу (3.3) и (3.6):

$$\Delta q = \int_0^{t_1} 5t^{10} dt = 5\frac{t^{11}}{11}\Bigg|_0^{t_1} = 5 \cdot \frac{2^{11}}{11} = 931 \text{ Кл.}$$

$$Q = \int_0^{t_1} 5^2 t^{20} R_1 dt = \frac{25 R_1 t^{21}}{21}\Bigg|_0^{t_1 = 2\text{ с}} = \frac{25 \cdot 20 \cdot 2^{21}}{21} = 4{,}99 \cdot 10^7 \text{ Дж} = 49{,}9 \text{ МДж}$$

Пример задачи.

По проводу сопротивлением R_1 = 30 Ом течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону $I = A\sin\omega t$,

где A = 4 А/с, $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ рад/с. Чему равно количество теплоты, выделившейся в проводе, и количество электричества, прошедшее по проводу за промежуток времени от $t_0 = 0$ до t_1 = 0,5 с?

Решение:

Подставим функцию силы тока от времени в формулу (3.3) и (3.6):

$$Q = \int_0^{t_1} A^2 \sin^2 \omega t \cdot R_1 dt = A^2 R_1 \int_0^{t_1} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{A^2 R_1}{2}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right)\Bigg|_0^{t_1} =$$

$$= \frac{4^2 \cdot 30}{2}\left(0{,}5 - \frac{\sin 0{,}5\pi}{\pi} \right) = 43{,}6 \text{ Дж}$$

$$\Delta q = \int_0^{t_1} A \sin\omega t\, dt = -A\frac{\cos\omega t}{\omega}\Bigg|_0^{t_1} = -4\left(\frac{\cos 0{,}5\pi - \cos 0}{\pi/2} \right) = \frac{8}{\pi} = 2{,}55 \text{ Кл.}$$

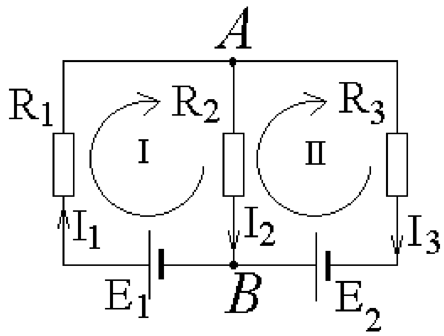


Рис.6

Электрическая схема всегда содержит множество элементов, таких как резисторы, конденсаторы, источники тока, катушки индуктивности. Эти элементы связаны соединительными проводами. В сложной схеме всегда есть *узлы* и *контуры*.

Узлы – это точки, в которой соединяются три и более проводов. На рис.6 узлами будут точки *A* и *B*.

Контур – это замкнутая линия, проведенная вдоль соединительных проводов так, что нигде не пересекает саму себя. На рис.6 изображены два контура I и II. Обход вдоль этих контуров здесь выбран по часовой стрелке (в общем случае можно выбрать произвольно).

Обычно известны характеристики всех элементов, входящих в схему, т.е. сопротивления резисторов, Э.Д.С. источников тока и т.д. Рассчитать схему – значит найти все токи, текущие по разным цепям. В этом могут помочь правила Кирхгофа.

1-е правило Кирхгофа: $$\sum I_i = 0\,, \qquad (3.7)$$

или *алгебраическая сумма всех сил токов, сходящихся в узле, равна* 0.

Токи, втекающие в узел берутся со знаком "–", а токи вытекающие из узла – со знаком "+". Таким образом для узла *B* на рис.6 можно записать $$I_2 + I_3 - I_1 = 0\,. \qquad (3.8)$$

2-е правило Кирхгофа: $$\sum I_i R_i = \sum E_i\,, \qquad (3.9)$$

– алгебраическая сумма падений напряжений на каждом элементе контура равна алгебраической сумме э.д.с. в этом контуре.

Падение напряжения на сопротивлении считается положительным, если направление тока через это сопротивление совпадает с направлением обхода контура, выбранного произвольно.

Э.Д.С. считается положительной, если при обходе контура осуществляется *переход через источник* от "–" (меньший отрезок) к "+" (больший отрезок).

Запишем формулу (9.3) для двух контуров:

Контур I: $$I_1 R_1 + I_2 R_2 = +E_1 \qquad (3.10)$$

Контур II: $$I_3 R_3 - I_2 R_2 = +E_2 \qquad (3.11)$$

Таким образом, чтобы рассчитать схему, т.е. найти токи I_1, I_2 и I_3, надо решить систему уравнений (3.8), (3.10), (3.11).

Если известны некоторые токи, то расчет схемы упрощается, и можно иногда обойтись решением всего одного уравнения.

Пример задачи.

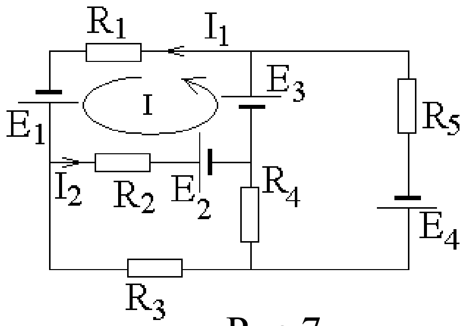


Рис.7

Найти Э.Д.С. E_1, если
$R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 3$ Ом,
$E_2 = 1$ В, $E_3 = 4$ В,
$I_1 = 3$ А, $I_2 = 2$ А.
Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Решение:

Запишем формулу (9.3) для контура I (см. рис.7).

$$I_1R_1 + I_2R_2 = E_3 + E_1 - E_2$$

И выразим отсюда E_1:

$E_1 = I_1R_1 + I_2R_2 - E_3 + E_2$ =3·4 + 2·6 – 4 + 1 = 21 В

Ответ: E_1 = 21 В

Задачи для работы на практическом занятии.

3.1 По проводу сопротивлением R_1= 2 Ом течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону $I = A\sqrt{t^3}$, где A = $\sqrt{2}$ А/с$^{3/2}$. Чему равно количество теплоты, выделившейся в проводе, и количество электричества, прошедшее по проводу за время t = 2 с?

Ответ: Q = 16 Дж; q = 3,2 Кл

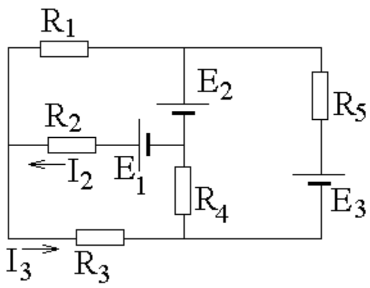
3.2 По проводу сопротивлением R_1 = 3 Ом течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону $I = A\exp(-Bt)$, где A = 5 А, B = 0,5 с$^{-1}$. Чему равно количество теплоты, выделившейся в проводе за время t_1 = 2 с, а также заряд, прошедший по проводу за это же время?

Ответ: Q = 64,8 Дж; q = 6,32 Кл

3.3 По проводу сопротивлением $R_1 = 3$ Ом течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по гармоническому закону $I = A\cos\omega t$, где A = 4 А, ω = π/3 $с^{-1}$. Чему равно количество теплоты, выделившейся в проводе за половину периода, а также заряд, прошедший по проводу за это же время?

Ответы: Q = 72 Дж; q = 0 Кл

3.4. Через сопротивление R = 5 Ом начинает течь ток, возрастающий со временем по закону $I = At^2$. Какое тепло выделится на сопротивлении к моменту t = 5 с, если за это время через сопротивление протечёт заряд q = 5 Кл? Ответ: 45 Дж



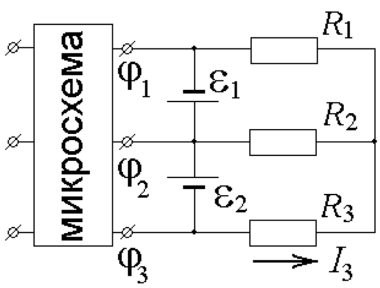
3.5 В схемезаданы, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $E_1 = 2$ В, $I_2 = 1$ А, $I_3 = 2$ А. Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.

Найти:

1) величины и направления сил токов I_1, I_4 и I_5, протекающих через резисторы R_1, R_4 и R_5 соответственно;

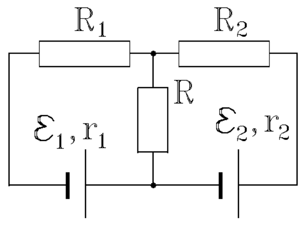
2) величину э.д.с. E_2.

Отв.: $I_1 =$ 1 А (влево); $I_4 =$ 1,5 А (вниз); $I_5 =$ 3,5 А (вверх); E_2 = 1 В.



3.6э. На рисунке представлена часть электрической схемы, для которой известны только некоторые параметры: $R_3 = 1$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, а источники имеют одинаковые внутренние сопротивления. Потенциалы $\varphi_2 = 2$ В, $\varphi_3 = 5$ В, а сила тока через сопротивление R_3 равна $I_3 = 1$ А. Чему равна сила тока через сопротивление R_2?

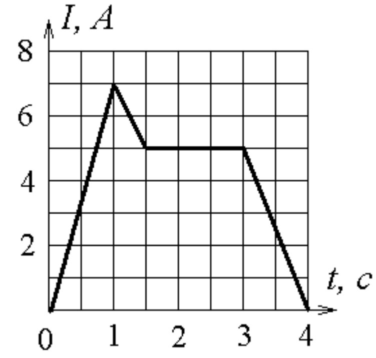
а) 1,0 А; б) 0,6 А; в) 0,5 А; г) нельзя рассчитать, т.к. не хватает данных



3.7. В схеме заданы ЭДС E_1 = 21 В и E_2 = 7 В, сопротивления r_1 = 1 Ом, r_2 = 2 Ом, R_1 = 5 Ом, R_2 = 3 Ом, R = 5 Ом. Найти тепловую мощность, выделяющуюся на сопротивлении R.

Ответ: 2,74 Вт.

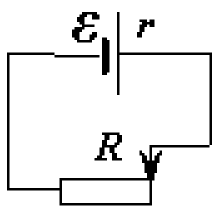
3.8э. Напряженность электрического поля в проводнике увеличили в 2 раза. Как изменилась удельная тепловая мощность (тепло, выделяющееся за единицу времени в единице объема)?
а) увеличилась в 2 раза; <u>б) увеличилась в 4 раза</u>;
в) увеличилась в 8 раз; г) уменьшилась в 2 раза.



3.9э. Сила тока, текущего по проводнику, меняется во времени, как показано на рисунке. Какой заряд протечет сквозь поперечное сечение проводника в промежуток времени

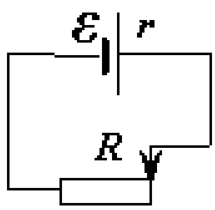
от t_1 = 1 с до t_2 = 3 с?

а) 7 Кл; б) 12 Кл; <u>в) 10,5 Кл</u>; г) 1,5 Кл.



3.10э. Реостат сопротивлением 10 Ом подключен к источнику тока с внутренним сопротивлением 1 Ом, как показано на рисунке.
Если движок реостата перемещать из крайнего правого положения влево, то мощность тока в реостате будет …
<u>а)</u> сначала увеличиваться, а затем уменьшаться
б) сначала уменьшаться, а затем увеличиваться
в) непрерывно увеличиваться
г) непрерывно уменьшаться

Задачи для самостоятельной работы.



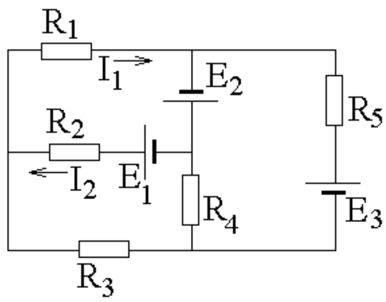
3.11э. Реостат сопротивлением 0,5 Ом подключен к источнику тока с внутренним сопротивлением 1 Ом, как показано на рисунке.
Если движок реостата перемещать из крайнего правого положения влево, то мощность тока в реостате будет …
а) сначала увеличиваться, а затем уменьшаться
б) сначала уменьшаться, а затем увеличиваться
в) непрерывно увеличиваться
<u>г)</u> непрерывно уменьшаться

3.12с. По проводу сопротивлением $R_1 = 25$ Ом течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону $I = A\sin\omega t$, где $\omega = 40\pi$ с$^{-1}$. Чему равно количество электричества, прошедшее за половину периода, если за это время в проводе выделилось 5 Дж тепла?

Ответ: 63,7 мКл

3.13с. По проводу сопротивлением $R_1 = 12$ Ом течет переменный электрический ток. Сила тока изменяется по закону $I = A\exp(-Bt)$, где B = 0,01 с$^{-1}$. Сколько тепла выделится в проводе за две секунды, если за это время по проводу прошел заряд 5 Кл?

Ответ: 150 Дж

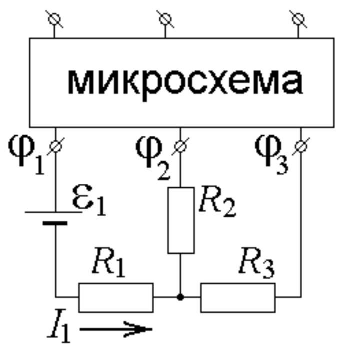


3.14с. В схеме даны $R_1 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = R_5 = 4$ Ом, $E_1 = 1$ В, $E_2 = 4$ В, $I_1 = 2$ А, $I_2 = 3$ А. Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.

Найти сопротивление R_2, направления и силы токов через резисторы R_3, R_4, R_5 и через источник E_2. Чему равна эдс E_3?

Ответы: 0,33 Ом, I_3 = 1 А (вправо), I_4 = 0,75 А (вниз),

I_5 = 1,75 А (вверх), I_6 = 3,75 А (вниз), E_3 = 14 В



3.15э. На рисунке представлена часть электрической схемы, для которой известны только некоторые параметры: $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, а источник $\varepsilon_1 = 5$ В и имеет нулевое внутреннее сопротивление. Потенциалы $\varphi_1 = 8$ В, $\varphi_2 = 2$ В, а сила тока через сопротивление R_1 равна $I_1 = 1$ А.

Чему равна сила тока через сопротивление R_2?

а) 7 А б) 5 А в) 3 А г) нельзя рассчитать, т.к. не хватает данных

Занятие 4.

Расчет силы тока через поперечное сечение проводника. Закон Ома в локальной и интегральной форме. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции.

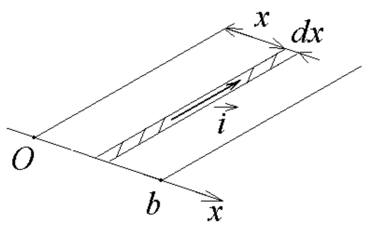
Плотность тока равна силе тока, протекающего сквозь единичную площадку, расположенную перпендикулярно линиям тока:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \qquad (4.1)$$

Зная распределение плотности тока в пространстве, можно расчитать полный ток сквозь произвольную поверхность S:

$$I = \int_S j \cdot dS = \int_S j \cdot dS \cdot \cos\alpha, \qquad (4.2)$$

где вектор $dS = dS \cdot n$, а n – это единичный вектор нормали к площадке dS; α – угол между векторами j и n.



Если проводник сделан в виде тонкой полосы, и известна линейная плотность тока i, то полный ток можно найти по формуле:

$$I = \int i(x)\,dx, \qquad (4.3)$$

где dx – ширина полоски, вдоль которой течет ток dI

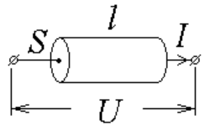
Закон ома в локальной форме утверждает, что плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля E, создающего этот ток:

$$j = \sigma E, \qquad (4.4)$$

где σ – *удельная проводимость* вещества, проводящего ток.

Обратная величина удельной проводимости называется *удельным сопротивлением*:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}. \qquad (4.5)$$



Из (2.8) в случае однородного электрического поля в куске провода длиной l следует:

$$U = -\Delta\varphi = E \cdot \Delta x = E \cdot l. \qquad (4.6)$$

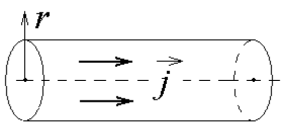
Преобразуя (4.3) можно вывести *закон Ома для однородного участка цепи*:

$$j \cdot S = \frac{S}{\rho \cdot l} E \cdot l \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U}{R}, \qquad (4.7)$$

где
$$R = \frac{\rho l}{S} \qquad (4.8)$$

– сопротивление участка длины l с поперечным сечением S.

Пример задачи.



По неоднородному цилиндрическому проводу радиуса R = 2 мм течет ток. Найдите силу тока, протекающего через поперечное сечение проводника, если зависимость плотности тока от расстояния r до оси задается формулой $j(r) = j_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{20}$, где $j_0 = 1$ А/мм^2.

Решение:

Разобъем поперечное сечение проводника (круг радиуса R) на кольца радиуса r и шириной dr (см. рис.8). Площадь такого кольца равна $dS = 2\pi r dr$, а угол α между j и dS равен 0°. Используя формулу (4.2), найдем полный ток, протекающий через все поперечное сечение проводника:

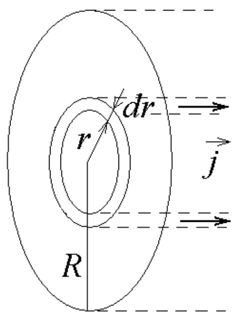
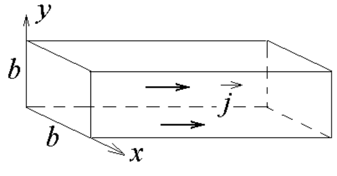


Рис.8

$$I = \int_0^R j_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{20} 2\pi r dr = \frac{2\pi j_0}{R^{20}} \int_0^R r^{21} = \frac{2\pi j_0}{R^{20}} \frac{r^{22}}{22}\bigg|_0^R = \frac{j_0 \pi R^2}{11} = 1{,}14\, A$$

Ответ: I = 1,14 А

Пример задачи



По неоднородному проводу квадратного сечения $b \times b$ течет ток. Найдите силу тока, протекающего через поперечное сечение проводника, если плотность тока зависит от расстояния x от одной из боковых граней по закону $j(x) = j_0 \left(\frac{x}{b}\right)^{99}$, где $j_0 = 2$ А/мм^2; b = 5 мм.

Решение:

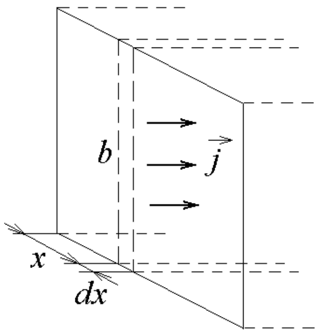


Рис.9

Разобъем поперечное сечение проводника (квадрат $b\times b$) на узкие полоски шириной dx и высотой b (см. рис.9). Площадь такой полоски равна $dS = bdx$ а угол α между j и dS равен 0°. Используя формулу (4.2), найдем полный ток, протекающий через все поперечное сечение проводника:

$$I=\int_0^b j_0\left(\frac{x}{b}\right)^{99} bdx=\frac{j_0}{b^{98}}\int_0^b x^{99}dx=\frac{j_0}{b^{98}}\frac{x^{100}}{100}\bigg|_0^b=\frac{j_0b^2}{100}$$

Ответ: I = 0,5 А

Пример задачи

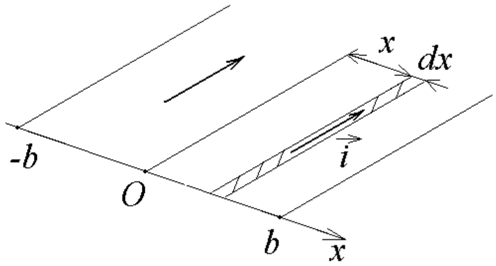


Рис.10

Вдоль средней линии проводящей полосы шириной 2b течет ток. Найдите силу тока, протекающего по всей полосе, если линейная плотность тока зависит от расстояния x до средней линии по закону $i(x)=i_0\left|\frac{x}{b}\right|^{199}$, где $i_0 = 2$ А/мм; b = 4 мм.

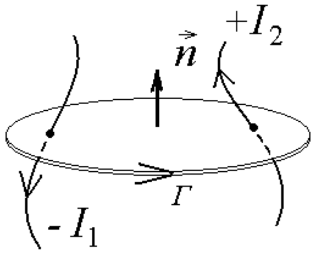
Решение:

Выделим на плоскости параллельно средней линии на расстоянии x узкую полоску шириной dx (см. рис.10). Используя формулу (4.3) найдем полный ток: $I=\int_{-b}^{b} i_0\left|\frac{x}{b}\right|^{199}dx=2\int_0^b i_0\frac{x^{199}}{b^{199}}dx=\frac{2i_0}{b^{199}}\frac{x^{200}}{200}\bigg|_0^b=\frac{i_0b}{100}$

Ответ: I = 0,08 А

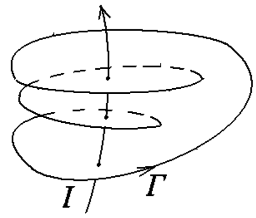
Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции:

$$\int_\Gamma Bdl=\mu_0\sum I_i \qquad (4.9)$$



– циркуляция по замкнутому контуру вектора индукции магнитного поля равна алгебраической сумме сил токов, пронизывающих поверхность S, ограниченную контуром, умноженной на магнитную постоянную $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м. Сила тока

считается положительной, если направление тока в точке пересечения с поверхностью S совпадает с направлением положительной нормали к поверхности в этой точке, и отрицательный, если направление тока противоположно направлению этой нормали. Положительная нормаль определяется по правилу правого винта по отношению к направлению обхода Γ (см. рис.).

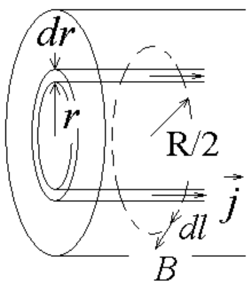


Если один из токов охватывается контуром N раз, то в формуле (4.9) такой ток будет складываться N раз.

Пример задачи.

По цилиндрическому проводнику радиуса R = 2 мм течёт ток, плотность которого меняется с расстоянием r от оси проводника по закону $j = j_0 \exp\left(-Br^2\right)$, где $B = 1$ мм$^{-2}$ j_0 = 3 А/мм^2. Найти индукцию магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = R/2$ от оси проводника.

Решение:



Выделим замкнутый контур Γ, совпадающий с линией индукции магнитного поля в виде окружности радиуса $R/2$, ось которой совпадает с осью проводника. Разделим сечение этого контура на полоски радиуса r, шириной dr и площадью $dS = 2\pi r dr$ и найдем суммарный ток, пронизывающий этот контур:

$$I = \int jdS = \int\limits_0^{R/2} j_0 \exp\left(-Br^2\right) 2\pi r dr = j_0 \pi \int \exp\left(-Br^2\right) d\left(r^2\right) =$$

$$= \left. \frac{j_0 \pi \exp\left(-Br^2\right)}{-B} \right|_0^{\frac{R}{2}} = \frac{j_0 \pi}{B}\left(1 - \exp\left(-BR^2/4\right)\right) = \frac{3 \cdot \pi}{1}\left(1 - e^{-1}\right) = 5{,}95\, A$$

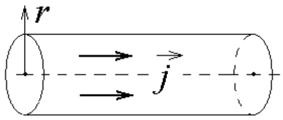
Циркуляция вектора B по этому контуру равна $\int Bdl = B \cdot 2\pi r_1 = B\pi R$

Из формулы (4.9) следует, что $B \cdot \pi R = \mu_0 \cdot \dfrac{j_0 \pi}{B}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{BR^2}{4}\right)\right)$ и

$$B = \frac{\mu_0 j_0}{RB}\left(1-\exp\left(-\frac{BR^2}{4}\right)\right) = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 3\,\text{А/мм}^2}{2\,\text{мм}\cdot 1\text{мм}^{-2}}\left(1-e^{-1}\right) = 11{,}9\cdot 10^{-7}\,\text{Тл}.$$

Ответ: 1,19 мкТл

Задачи для работы на практическом занятии.

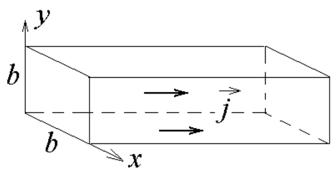


4.1. По неоднородному цилиндрическому проводу радиуса R = 2 мм течет ток. Найдите силу тока, протекающего через поперечное сечение проводника, если плотность тока зависит от расстояния r до оси по закону :

а) $j(r) = j_0(r/R)^2$, где j_0 = 1,5 А/мм^2;

б) $j(r) = j_0\exp\left(-Br^2\right)$, где j_0 = 4 А/мм^2, B= 0,01 мм$^{-2}$.

Ответ: а) 9,42 А; б) 49,2 А.

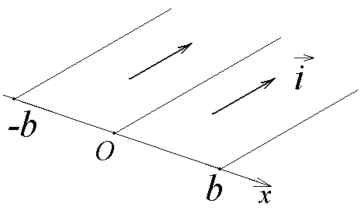


4.2. По неоднородному проводу квадратного сечения $b\times b$ течет ток. Найдите силу тока, протекающего через поперечное сечение проводника, если плотность тока зависит от расстояния x от одной из боковых граней по закону:

а) $j(x) = j_0\left(\frac{x}{b}\right)^5$, где $j_0 = 3$ А/мм^2; b = 4 мм.

б) $j(x) = j_0\sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$, где j_0 = 2 А/мм^2, $b =$ 5 мм.

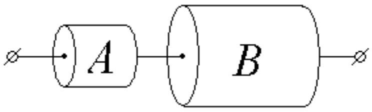
Ответы: а) 8 А; б) 31,8 А



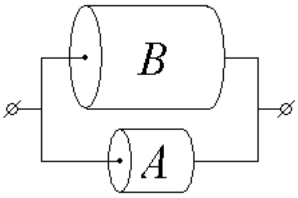
4.3. Вдоль средней линии проводящей полосы шириной 2b = 6 мм течет ток. Найдите силу тока, протекающего по всей полосе, если линейная плотность тока зависит от расстояния x до средней линии по закону:

а) $i(x) = i_0\left|\frac{x}{b}\right|^3$, где $i_0 = 2$ А/мм; б) $i(x) = i_0\cos\left(\frac{\pi x}{2b}\right)$, где $i_0 = \pi$ А/мм.

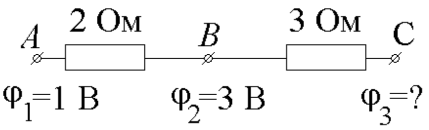
Ответы: а) 3 А; б) 12 А.



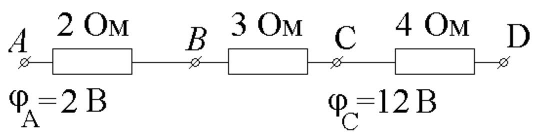
4.4э. По двум однородным цилиндрам, изготовленным из одинакового материала, течет постоянный ток. Что можно сказать о соотношении между величинами плотностей тока в цилинде А и в цилиндре В?
а) Исходя из рисунка, нельзя сказать определенно. Надо знать точное соотношение между длиной и площадью цилиндра.
б) $j_A < j_B$ в) $j_A = j_B$ г) $j_A > j_B$



4.5э. Два однородных цилиндра из одинакового материала подключены параллельно к источнику постоянного напряжения. Что можно сказать о соотношении между величинами напряженностей электрического поля в цилиндре А и в цилиндре В?
а) $E_A < E_B$ б) $E_A = E_B$ в) $E_A > E_B$
г) Исходя из рисунка, нельзя сказать определенно. Надо знать точное соотношение между длиной и площадью цилиндра.



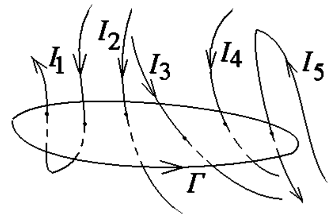
4.6э В некоторой замкнутой цепи существует участок, состоящий из двух резисторов, соединенных последовательно. В точках соединения резисторов А и В известны потенциалы φ_1 и φ_2 (см. рис.). Потенциал φ_3 в точке С равен... а) 6 В б) 0 В в) 7,5 В г) -1,5 В

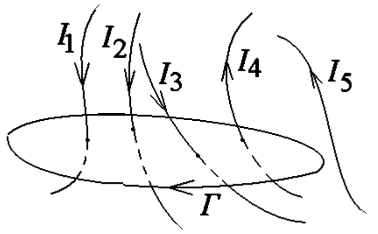


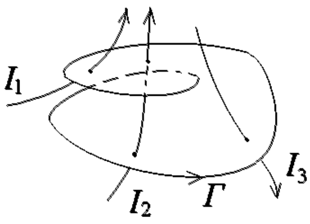
4.7э В некоторой замкнутой цепи существует участок, состоящий из трех резисторов, соединенных последовательно. В точках соединения резисторов А и С известны потенциалы φ_A и φ_C (см. рис.). На участке АС выделяется тепловая мощность, равная... а) 20 Вт б) 36 Вт в) 28 Вт г) 14 Вт

4.8. По цилиндрическому проводнику радиуса R течёт ток, плотность которого меняется с расстоянием r от оси проводника по закону $j = j_0 \dfrac{r}{R}$, где j_0 = const. Найти отношение индукций магнитного поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 2R$ и $r_2 = R/2$ от оси проводника. Ответ: $B_1/B_2 = 2$.

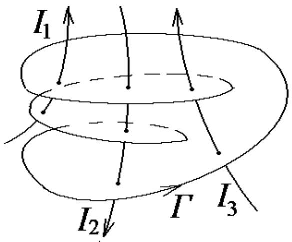
4.9. По длинным проводам различной конфигурации текут разные токи. $I_1 = 1$ А, $I_2 = 2$ А, $I_3 = 3$ А, $I_4 = 4$ А, $I_5 =$ 5 А. Найдите циркуляцию вектора индукции магнитного поля, созданного этими токами, по замкнутому контуру Г.

а) 

б) 

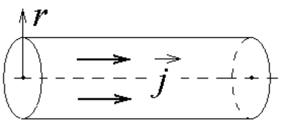
в) 

;

г) 

Ответы: а) – 17,6 мкТл·м ; б-в-г) 2,51 мкТл·м;

Задачи для самостоятельной работы.

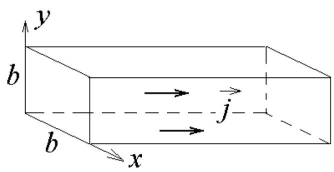


4.10с. По неоднородному цилиндрическому проводу радиуса R = 3 мм течет ток. Найдите силу тока, протекающего через поперечное сечение проводника, если плотность тока зависит от расстояния r до оси по закону

а) $j(r) = j_0 (r/R)^5$, где $j_0 = 1{,}4$ А/мм^2;

б) $j(r) = j_0 \sin\left(Br^2\right)$, где j_0 = 3 А/мм^2, B= 0,01 мм$^{-2}$.

Ответ: а) 11,3 А; б) 3,81 А.

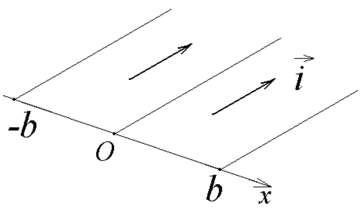


4.11с. По неоднородному проводу квадратного сечения $b \times b$ течет ток. Найдите силу тока, протекающего через поперечное сечение проводника, если плотность тока зависит от расстояния x от одной из боковых граней по закону:

а) $j(x) = j_0 \sqrt{\dfrac{x}{b}}$, где $j_0 = 2$ А/мм^2; b = 3 мм.

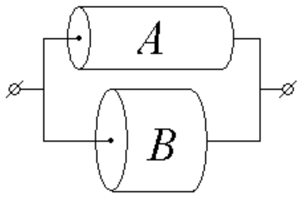
б) $j(x) = j_0 \exp\left(-\dfrac{x}{b}\right)$, где j_0= 4 А/мм^2, $b =$ 2 мм.

Ответы: а) 12 А; б) 10,1 А



4.12с. Вдоль средней линии проводящей полосы шириной $2b$ = 8 мм течет ток. Найдите силу тока, протекающего по всей полосе, если линейная плотность тока зависит от расстояния x до средней линии по закону:

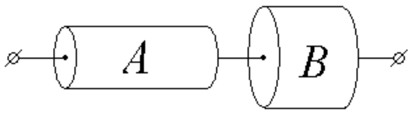
$i(x) = i_0 \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2b}\right) \right|$, где $i_0 = 2\pi$ А/мм. Ответ: 32 А.



4.13э. Два однородных цилиндра из одинакового материала подключены параллельно к источнику постоянного напряжения. Что можно сказать о соотношении тепловых мощностей P_A и P_B, выделяющихся в этих цилиндрах?

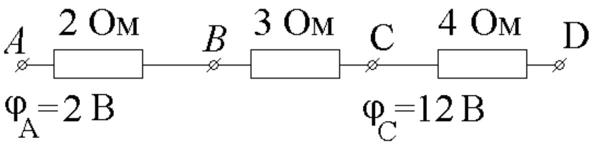
а) $P_A = P_B$ б) $P_A < P_B$ в) $P_A > P_B$

г) Исходя из рисунка, нельзя сказать определенно. Надо знать точное соотношение между длиной и площадью цилиндра.



4.14э. По двум однородным цилиндрам, изготовленным из одинакового материала, течет постоянный ток. Что можно сказать о соотношении тепловых мощностей P_A и P_B, выделяющихся в этих цилиндрах? а) $P_A > P_B$ б) $P_A = P_B$ в) $P_A < P_B$

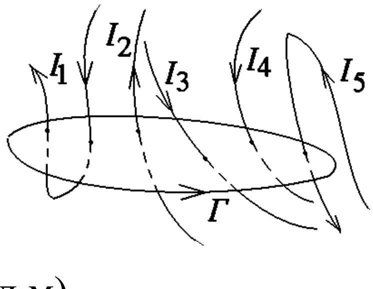
г) Исходя из рисунка, нельзя сказать определенно. Надо знать точное соотношение между длиной и площадью цилиндра.



4.15э. В некоторой замкнутой цепи существует участок, состоящий из трех резисторов, соединенных последовательно. В точках соединения резисторов А и С известны потенциалы φ_A и φ_C (см. рис.). На участке АС выделяется тепловая мощность, равная...

а) 20 Вт б) 36 Вт в) 28 Вт г) 14 Вт

4.16с. По длинным проводам различной конфигурации текут разные токи. Найдите циркуляцию вектора индукции магнитного поля, созданного этими токами, по замкнутому контуру Г.



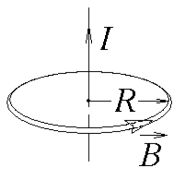
$I_1 = 1$ А, $I_2 = 3$ А, $I_3 = 3$ А, $I_4 = 4$ А, $I_5 = 5$ А.

а) 7,3; б) – 9,3; в) 9,3; г) – 11,3 ; д) 11,3. (мкТл·м)

Занятие 5.

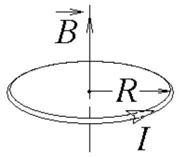
Суперпозиция магнитных полей. Виток с током в магнитном поле. Сила Лоренца.

Рассмотрим несколько простых примеров создания магнитного поля электрическими токами разных конфигураций:



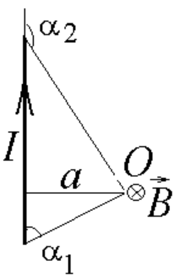
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \qquad (5.1)$$

– индукция магнитного поля прямого провода на расстоянии R от него.



$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}, \qquad (5.2)$$

– индукция магнитного поля в центре витка с радиусом R.



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right), \qquad (5.3)$$

– индукция магнитного поля, созданного отрезком с током в точке O на расстоянии a от линии, на которой лежит этот отрезок.

Направление индукции магнитного поля B определяется по правилу правого винта (см. рисунки к формулам (5.1) – (5.3)).

Индукция магнитного поля, созданного проводником сложной конфигурации, находится по принципу суперпозиции полей:

$$B = \sum B_i , \qquad (5.4)$$

где B_i – индукция поля, созданного частью провода простой формы.

Пример задачи

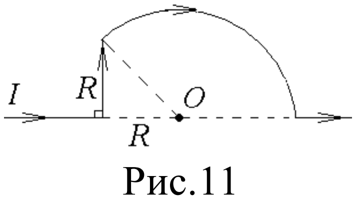


Рис.11

Электрический ток I = 1 А течет по длинному проводу, изогнутому так, как показано на рис.4. Найдите индукцию магнитного поля, созданного этим током в точке O, если R = 1 м.

Решение:

Как видно из рис.11, магнитное поле в точке О создается отрезком длиной R и дугой радиуса $\sqrt{2}R$ с углом разворота $\varphi = 135°$. Электрический ток, направленный на точку О магнитного поля в ней не создает.

Используем формулу (5.2) для нахождения индукции магнитного поля, созданного дугой:

$$B_{\text{дуги}} = \frac{135°}{360°}\frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}R} = \frac{135 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{360 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1} = 1{,}666 \cdot 10^{-7} \text{ Тл}$$

Индукцию магнитного поля, созданного отрезком, найдем по формуле (5.3), подставляя следующие данные:
$a = R$; $\alpha_1 = 90°$; $\alpha_2 = 135°$.

$$B_{\text{отрезка}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\cos 90° - \cos 135°\right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{4\pi \cdot 1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}707 \cdot 10^{-7} \text{ Тл}$$

Результирующее поле равно сумме этих полей, так как вектора индукции $B_{\text{дуги}}$ и $B_{\text{отрезка}}$ направлены в точке О в одну сторону:

$B_{\text{рез}} = B_{\text{отр}} + B_{\text{дуги}} = 0{,}237$ мкТл **Ответ:** 0,237 мкТл;

Пример задачи.

Ток I = 1 А течет по длинному проводу, изогнутому так, как показано на рис.5. Найдите индукцию магнитного поля, созданного этим током в центре окружности радиуса R = 1 м.

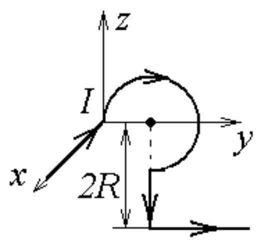


Рис.12

Решение:

Найдем отдельные вклады в индукцию магнитного поля в точке О (центр окружности), созданные двумя полубесконечными прямолинейными проводниками и проводником в виде дуги с углом разворота $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Для луча с током, текущим против оси x на расстоянии R от точки О, воспользуемся половинным вкладом из формулы (5.1):

$$B_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{4\pi \cdot 1} = 10^{-7} \text{ Тл}$$

Аналогично для второго луча с током, текущим вдоль оси y на расстоянии $2R$ от точки О:

$$B_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot 2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{8\pi \cdot 1} = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ Тл}$$

Для проводника в виде дуги в $3/4$ окружности радиусом R используем формулу (5.2):

$$B_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{12\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{8 \cdot 1} = 4,71 \cdot 10^{-7} \text{ Тл}$$

Направления векторов B_1, B_2 и B_3 различны:

B_1 – направлен *против* оси z;

B_2 – направлен *вдоль* оси x;

B_3 – направлен *против* оси x.

Используя принцип суперпозиции (5.4) и теорему Пифагора, найдем модуль индукции результирующего магнитного поля в точке О:

$$B_{\text{рез}} = \sqrt{B_1^2 + \left(B_2 - B_3\right)^2} = 10^{-7} \cdot \sqrt{1^2 + \left(0,5 - 4,71\right)^2} = 4,33 \cdot 10^{-7} \text{ Тл}$$

Ответ: 0,433 мкТл

Небольшой виток площадью S с током I обладает *магнитным моментом* $p_m = I \cdot S = I \cdot S \cdot n$, который направлен вдоль положительной нормали n, определяемой по правилу правого винта относительно направления тока по этому витку. Такой магнитный момент, взаимодействуя с внешним магнитным полем с индукцией B, обладает энергией взаимодействия

$$W = -\left(p_m \cdot B\right) \qquad (5.5)$$

Стремясь занять в пространстве положение с наименьшей потенциальной энергией (5.5), виток разворачивает свой магнитный момент вдоль индукции поля B. В неоднородном магнитном поле на такой виток действует сила

$$F = -gradW = -\left(i\,\frac{\partial W}{\partial x} + j\,\frac{\partial W}{\partial y} + k\,\frac{\partial W}{\partial z}\right), \qquad (5.6)$$

которая стремится втянуть виток в область с большей индукцией.

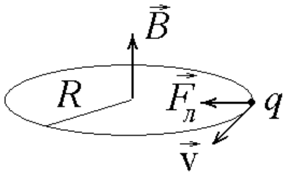


Рис. 13

Если частица с электрическим зарядом q и массой m влетает со скоростью v в магнитное поле с индукцией B, то на нее начинает действовать сила Лоренца

$$F_л = q\left[\mathrm{v} \times B\right], \qquad (5.7)$$

которая перпендикулярна скорости частицы v и индукции B. Это приводит к искривлению траектории без изменения скорости частицы (так как сила Лоренца не совершает работу).

Рассмотрим ситуацию, когда частица влетает в магнитное поле перпендикулярно индукции B. В этом случае она будет двигаться по окружности с постоянной скоростью, а сила Лоренца будет являться центростремительной силой (см. рис.13).

Найдем радиус окружности, используя второй закон Ньютона:

$$F_л = q\mathrm{v}B\sin 90° = ma_n = m\frac{\mathrm{v}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{m\mathrm{v}}{qB} \qquad (5.8)$$

Используя формулу (5.8), можно рассчитать период вращения частицы по окружности:

$$T = \frac{2\pi R}{\mathrm{v}} = \frac{2\pi m}{qB} \qquad (5.9)$$

На участок проводника dl с током I в магнитном поле действует сила Ампера:

$$dF_A = I\left[dl \times B\right]. \qquad (5.10)$$

Пример задачи.

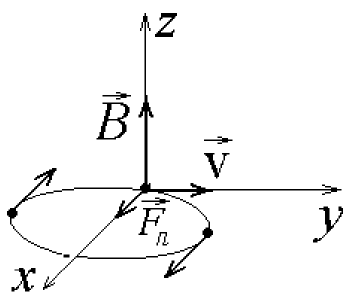


Рис. 14

В однородном магнитном поле с индукцией B = 1 Тл по окружности летает положительно заряженная частица с зарядом q = 1 мкКл и массой m = 10^{-10}кг со скоростью v = 10 км/с. Индукция магнитного поля B направлена вдоль оси z. В начальный момент времени скорость частицы v была направлена вдоль оси y. Найти минимальное время t, через которое скорость частицы будет направлена а) вдоль оси x; б) против оси x. Найти пройденный путь за это время.

Решение:

Из векторного выражения (7.1) следует, что сила Лоренца, действующая на частицу в начальный момент времени направлена вдоль оси x, поэтому частица будет двигаться так, как показано на рис.14. Из этого рисунка следует, что через четверть оборота или через время $t = T/4$ скорость частицы окажется направленной параллельно оси x, а через три четверти периода ($t = 3T/4$) – антипараллельно оси x. Используя формулу для радиуса окружности (5.8) и периода (5.9), получаем ответ:

а) $t = \frac{1}{4}T = \frac{2\pi m}{4qB} = \frac{3{,}14\cdot 10^{-10}}{2\cdot 10^{-6}\cdot 1} = 1{,}57\cdot 10^{-4}$ с;

$$S = \frac{1}{4}\cdot 2\pi R = \frac{\pi m \mathrm{v}}{2qB} = \frac{3{,}14\cdot 10^{-10}10^{4}}{2\cdot 10^{-6}\cdot 1} = 1{,}57 \text{ м.}$$

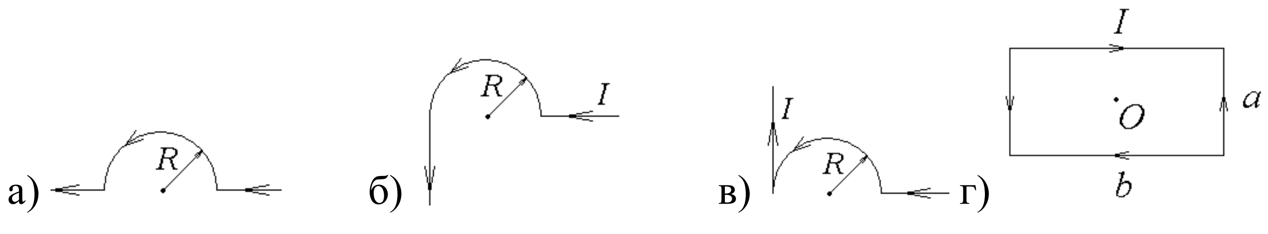
б) $t = \frac{3}{4}T = \frac{3\cdot 2\pi m}{4qB} = \frac{3\cdot 3{,}14\cdot 10^{-10}}{2\cdot 10^{-6}\cdot 1} = 4{,}71\cdot 10^{-4}$ с

$$S = \frac{3}{4}\cdot 2\pi R = \frac{3\pi m \mathrm{v}}{2qB} = \frac{3\cdot 3{,}14\cdot 10^{-10}10^{4}}{2\cdot 10^{-6}\cdot 1} = 4{,}71 \text{ м.}$$

Ответы: а) t = 0,157 мс; S = 1,57 м; б) t = 0,471 мс; S = 4,71 м.

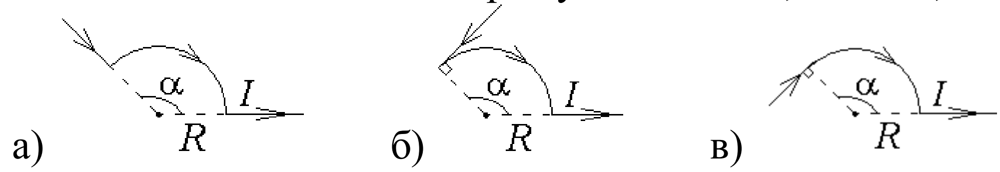
Задачи для работы на практическом занятии.

5.1. Электрический ток течет по длинному проводу, изогнутому так, как показано на рисунке. Найдите индукцию магнитного поля, созданного этим током в центре полуокружности и в центре прямоугольника. I =1 А, R = 1 м, a = 1 м, b = 2 м.

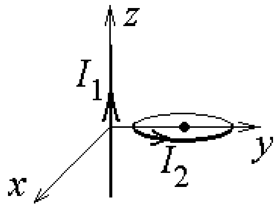


Ответы: а) 0,314 мкТл; б) 0,414 мкТл; в) 0,214 мкТл; г) 0,894 мкТл

5.2. Электрический ток течет по длинному проводу, изогнутому так, как показано на рисунке. Найдите индукцию магнитного поля, созданного этим током в центре дуги. $I = 1$ А, $R = 1$ м, $\alpha = 120^0$.

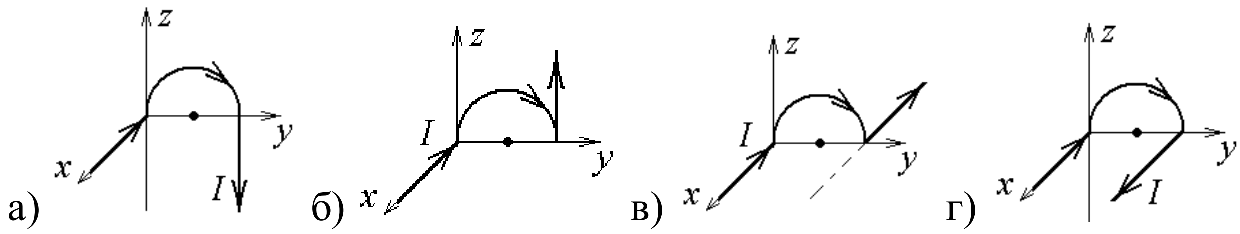


Ответы: а) 0,209 мкТл; б) 0,109 мкТл; в) 0,309 мкТл;



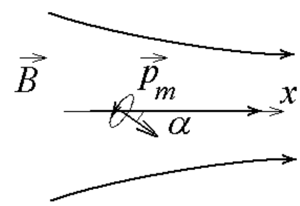
5.3. Ток I_1 течет по прямому проводу вдоль оси Z. Параллельно плоскости XY расположен виток радиуса R с током I_2. Центр витка лежит на оси Y на расстоянии $2R$ от начала координат . Найдите индукцию магнитного поля, созданного этими токами в центре витка. $I_1 =$ 1 А, $I_2 = 2$ А, $R = 1$ м. Ответ: 1,26 мкТл

5.4. Ток I течет по длинному проводу, изогнутому так, как показано на рисунке. Найдите индукцию магнитного поля, созданного этим током в центре окружности радиуса R. $I =$ 1 А, $R = 1$ м.

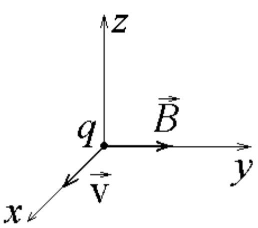


Ответы: а) 0,426 мкТл; б) 0,236 мкТл; в) 0,314 мкТл; г) 0,372·мкТл;

5.5. Небольшой виток с током, обладающий магнитным моментом $p_m = 1$ А·м^2, удерживают в неоднородном магнитном поле на оси x под углом α = 60° к ней. Определите проекцию силы F_x, действующей на виток в точке с координатой x_0 =



1 м, если величина индукция магнитного поля на оси x меняется по закону $B(x) = Ax^3$, где $A =$ 1 Тл/м^3. Ответ: 1,5 Н;

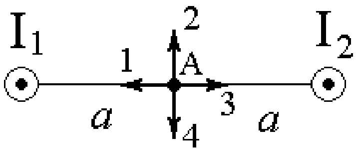


5.6. В однородном магнитном поле с индукцией В по окружности летает заряженная частица с зарядом

q = – 2 мКл, массой m = 10^{-10}гк со скоростью v = 200 м/с. Индукция магнитного поля B = 1 мкТл и направлена вдоль оси *y*. В начальный момент времени скорость частицы v была направлена вдоль оси *x*. Найти:

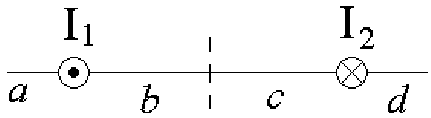
А) через какое время t скорость частицы в первый раз становится направленной вдоль оси *z*;
Б) путь *S,* пройденный частицей за это время;
В) максимальное удаление частицы от оси *x;*
Г) максимальное удаление от оси *z*,

Ответы: А) 0,236 с; Б) 47,1 м; В) 20 м ; Г) 10 м.



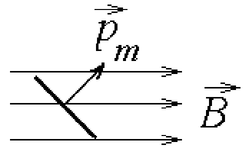
5.7э. Магнитное поле создано двумя длинными параллельными проводниками с токами I_1 и I_2, расположенными перпендикулярно плоскости чертежа. Если $I_1 = 2I_2$, то вектор B индукции результирующего поля в точке А направлен ...

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) $B = 0$

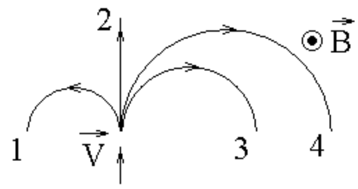


5.8э. На рисунке изображены сечения двух прямолинейных длинных параллельных проводников с противоположно направленными токами, причем $I_1 = 2I_2$. Индукция B магнитного поля равна нулю в некоторой точке участка ...
1) *a;* 2) *b;* 3) *c*; 4) *d*; 5) нет такой точки; 6) посередине между проводами;

5.9э. Рамка с током, обладающая магнитным моментом p_m, находится в однородном магнитном поле с индукцией B. Куда направлен момент сил, действующий на рамку?

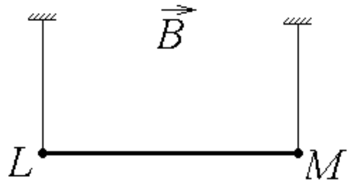


а) перпендикулярно рисунку "от нас";
б) перпендикулярно рисунку "к нам";
в) вдоль индукции магнитного поля;
г) против индукции магнитного поля.



5.10э. На рисунке указаны траектории заряженных частиц, имеющих одинаковую скорость и влетающих в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости чертежа.
При этом для частицы 1 ... а) $q > 0$; б) $q < 0$; в) $q = 0$;

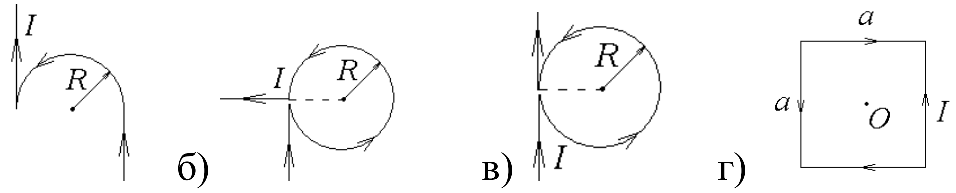
5.11э. В магнитном поле на двух нитях висит горизонтальный проводящий стержень. Натяжение нитей равно нулю. Как соотносятся направления магнитного поля и силы тока в стержне?



а) ток течет от L к M, индукция направлена от нас;
б) ток течет от L к M, индукция направлена вправо;
в) ток течет от M к L, индукция направлена от нас;
г) ток течет от M к L, индукция направлена вверх;

Задачи для самостоятельной работы.

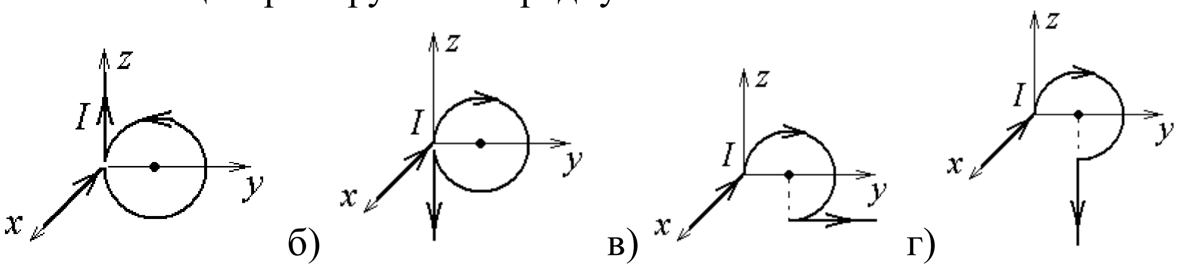
5.12с. Электрический ток течет по длинному проводу, изогнутому так, как показано на рисунке. Найдите индукцию магнитного поля, созданного этим током в центре окружности и квадрата, если I =1 А, R = 1 м, a = 1 м.



а) б) в) г)

Ответы: а) 0,314 мкТл; б) 0,528 мкТл; в) 0,428 мкТл. г) 1,13 мкТл

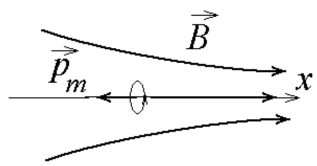
5.13с. Ток $I =$ 1 А течет по длинному проводу, изогнутому так, как показано на рисунке. Найдите индукцию магнитного поля, созданного этим током в центре окружности радиуса R= 1 м.



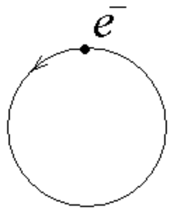
а) б) в) г)

Ответы:а) 0,537 мкТл; б) 0,537 мкТл; в) 0,384 мкТл; г) 0,481 мкТл;

5.14с. Небольшой виток с током, обладающий магнитным моментом $p_m = 2$ А·м^2, удерживают в неоднородном магнитном поле на оси x в точке с координатой x_0 = 0,5 м. Направление магнитного момента витка противоположно направлению индукции магнитного поля. Определите проекцию силы F_x, действующей на виток, если величина индукции магнитного поля на оси x меняется по закону $B(x) = Ax^5$,

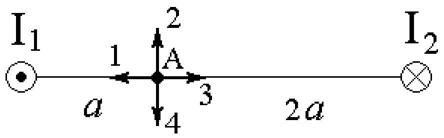


где A = 3 Тл/м^5. Ответ: – 1,875 Н.



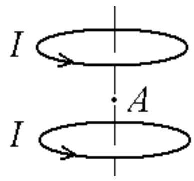
5.15э. Электрон летает по окружности в однородном магнитном поле так, как показано на рисунке. Куда направлен вектор индукции магнитного поля?

а) $\odot\ \vec{B}$ б) $\longleftarrow \vec{B}$ в) $\otimes\ \vec{B}$ г) $\longrightarrow \vec{B}$



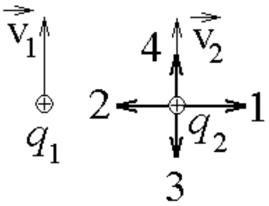
15.16э. Магнитное поле создано двумя длинными параллельными проводниками с токами I_1 и I_2, расположенными перпендикулярно плоскости чертежа. Если $I_1 = 2I_2$, то вектор B индукции результирующего поля в точке А направлен ...

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) $B = 0$



15.17э. По двум соосным виткам течет одинаковый ток в одном направлении. Расстояние между центрами витков равно 2 см. Верхний виток создает магнитное поле с индукцией B = 1 мкТл в точке А, расположенной на оси на растоянии 1 см от его центра. Чему равна величина индукции магнитного поля, созданного двумя витками?

а) 2 мкТл; б) 0 мкТл; в) $\sqrt{2}$ мкТл; г) 4 мкТл.



15.18э. Две положительно заряженные частицы движутся по параллельным линиям на некотором расстоянии друг от друга. Магнитная сила, действующая на правый заряд, имеет направление...

а) 1; б) 2 ; в) 3) г) 4.

Занятие 6

Э.Д.С. индукции и самоиндукции. Электрические затухающие и вынужденные колебания

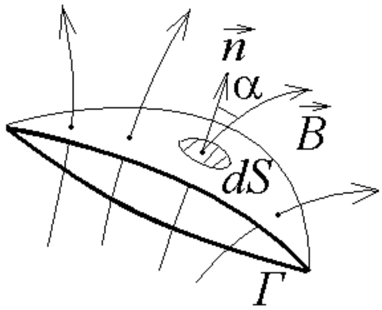


Рис. 15

Рассмотрим замкнутый контур *Г* произвольной формы в неоднородном магнитном поле, который ограничивает некоторую поверхность *S* (см. рис.15). Потоком индукции магнитного поля сквозь эту поверхность называется величина

$$\Phi = \int_S BdS = \int_S BdS\cos\alpha\,, \qquad (6.1)$$

где α – угол между вектором B и нормалью n к площадке поверхности *dS*, которую магнитное поле пронизывает.

При изменении потока Φ во времени в контуре *Г* возникает **Э.Д.С. индукции** – электродвижущая сила, равная скорости изменения магнитного потока (*закон электромагнитной индукции Фарадея*):

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (6.2)$$

Если бы контур был сделан из проводящего вещества, то по нему потек бы электрический ток.

Поток Φ может изменяться по следующим причинам.

1) Изменяется индукция магнитного поля B.

2) Изменяются геометрические размеры контура, т.е. изменяется площадь *S*.

3) Изменяется ориентация контура в пространстве, т.е. изменяется угол α.

В случае 1) в пространстве возникает вихревое электрическое поле $E_{\text{вихр}}$, действующее на свободные электроны проводящего контура.

В случаях 2) и 3) из-за перемещения проводника в магнитном поле на свободные электроны в нем действует сила Лоренца.

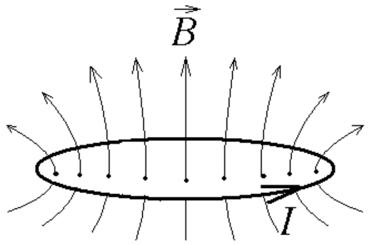


Рис. 16

Если рассмотреть контур, по которому протекает ток I (см. рис.16), то индукция B порождаемого этим током магнитного поля создает сквозь поверхность контура поток, пропорциональный силе тока I:

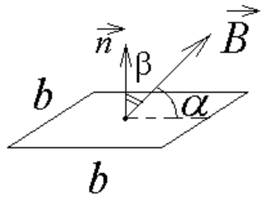
$$\Phi = L \cdot I\,, \qquad (6.3)$$

где коэффициент пропорциональности L называется *индуктивностью контура.* Если ток в контуре начинает изменяться, то в нем возникнет **Э.Д.С. самоиндукции:**

$$\varepsilon_{\text{самоинд}} = -\frac{d\left(L \cdot I\right)}{dt} \qquad (6.4)$$

Знак "–" в формулах (6.2) и (6.4) означает, что **при изменении магнитного потока сквозь замкнутый контур в нем возникает такая Э.Д.С., которая стремится уменьшить изменение потока.** Это *правило Ленца.* В результате *увеличения* силы тока на рис. 16, а следовательно и индукции B, возникает вихревое электрическое поле, направленное против тока I в контуре.

Пример задачи



Квадратный проводящий контур со стороной b = 1 м пронизывает однородное магнитное поле под углом α = 30° к плоскости контура. Индукция магнитного поля меняется со временем по закону $B(t) = B_0\left(t/\tau\right)^8$. Найти модуль э.д.с. индукции в контуре в момент времени t = 1 с, если $B_0 = 1$ Тл; τ = 1 с.

Решение:

Определим зависимость магниного потока от времени:

$$\Phi = BS\cos\beta = BS\cos\left(90° - \alpha\right) = B_0\left(\frac{t}{\tau}\right)^8 b^2\cos 60° = \frac{1}{2}\frac{B_0 b^2}{\tau^8}t^8$$

По формуле (6.2) определим модуль Э.Д.С. индукции:

$$\varepsilon_{\text{инд}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{B_0 b^2}{2\tau^8}t^8\right) = \frac{B_0 b^2}{2\tau^8}8t^7 = 4\ \text{В}$$

Ответ: 4 В

Пример задачи

По проводящему контуру индуктивностью L течет ток I. Найти модуль э.д.с. самоиндукции в контуре в момент времени $t = 1$ с, если и ток и индуктивность изменяются со временем по законам $L(t) = L_0\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^6$, $I(t) = I_0\dfrac{t}{\tau}$, где $L_0 = 1$ Гн; $I_0 = $ 1А; $\tau = 1$ с.

Решение:

Воспользуемся формулой (6.4):

$$\left|\varepsilon_{\text{самоинд}}\right| = \left|\frac{d(L \cdot I)}{dt}\right| = \frac{d}{dt}\left(L_0\left(\frac{t}{\tau}\right)^6 I_0\frac{t}{\tau}\right) = \frac{L_0 I_0}{\tau^7}\frac{d}{dt}\left(t^7\right) = \frac{7L_0 I_0 t^6}{\tau^7} = 7 \text{ В.}$$

Электрические затухающие колебания

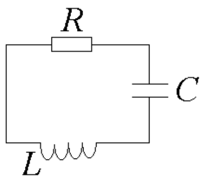


Рис.17

Уравнение затухающих колебаний в контуре (см. рис.17), состоящем из последовательно соединенных резистора с сопротивлением R, конденсатора с емкостью C и катушки с индуктивностью L, выглядит так:

$$q = A_0 \exp(-\beta t)\cos(\omega t + \alpha_0), \qquad (6.5)$$

где α_0 – начальная фаза колебаний, ω – циклическая частота собственных затухающих колебаний.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,; \qquad (6.6)$$

Коэффициент затухания β и циклическая частота собственных незатухающих колебаний ω_0 определяются так:

$$\beta = \frac{R}{2L}; \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (6.7)$$

Логарифмический декремент затухания θ и **время релаксации** τ (время, за которое амплитуда уменьшится в $e = 2{,}72$ раз) определяются так:

$$\theta = \beta T. \qquad \tau = \frac{1}{\beta} \qquad (6.8)$$

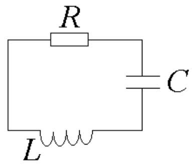
Амплитуда колебаний в контуре уменьшается со временем по закону:

$$A = A_0 \exp(-\beta t), \qquad (6.9)$$

где A_0 – *начальная* амплитуда. Так как энергия незатухающих и слабозатухающих колебаний пропорциональна квадрату амплитуды $W \quad A^2$, то, используя (6.9), получим:

$$W \quad A_0^2 \exp(-2\beta t) \qquad (6.10)$$

Пример задачи



В контуре совершаются свободные слабозатухающие колебания, при которых заряд на конденсаторе изменяется во времени по закону $q = q_0 \exp(-at)\sin(bt)$. Оцените время, через которое энергия контура уменьшится в 2 раза. $q_0 = 1$ мкКл; $a = 0{,}05$ с$^{-1}$; $b = 10$ с$^{-1}$. Каким станет коэффициент затухания, если:

а) сопротивление R в контуре увеличить в 2 раза?

б) индуктивность L в контуре увеличить в 2 раза?

в) емкость C в контуре увеличить в 2 раза?

Решение:

Энергия контура W пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, поэтому, используя формулу (6.9) и учитывая, что β = a = 0,05 с$^{-1}$, получим: $W \quad A^2 = q_0^2 e^{-2at}$

Из отношения энергий контура в начальный момент времени и в момент времени t

$$\frac{W_0}{W_1} = \frac{q_0^2}{q_0^2 e^{-2at}} = e^{2at} = 2$$

найдем время $t = \dfrac{\ln 2}{2a} = \dfrac{\ln 2}{0{,}1} = 6{,}93$ с

из формулы (6.7) следует, что

а) если сопротивление в контуре увеличить в два раза, то коэффициент затухания увеличится также в два раза: $\beta_2 = \dfrac{R_2}{2L} = \dfrac{2 \cdot R_1}{2L} = 2\beta_1 = 0{,}1$ с$^{-1}$;

б) при изменении индуктивности в два раза, коэффициент затухания уменьшится в два раза: $\beta_2 = \dfrac{R}{2L_2} = \dfrac{R}{2 \cdot 2L_1} = \dfrac{\beta_1}{2} = 0{,}025$ с$^{-1}$;

в) при изменении емкости в два раза коэффициент затухания не изменится, так как он не зависит от емкости C (см. формулу (6.7)).

Ответы: t = 6,93 с; а) β = 0,1 с$^{-1}$; б) β = 0,025 с$^{-1}$; в) β = 0,05 с$^{-1}$.

Электрические вынужденные колебания.

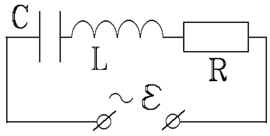


Рис.18

Если в контур включить внешний источник, ЭДС которого меняется по гармоническому закону $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega_в t)$, то в контуре установятся вынужденные гармонические колебания с частотой источника $\omega_в$ и амплитудой q_0. Зависимость заряда на конденсаторе от времени будет выглядеть так:

$$q = q_0 \cos(\omega_в t - \varphi) \qquad (6.11)$$

Для того чтобы найти выражение для силы тока в цепи продифференцируем (6.11) по времени:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega_в \sin(\omega_в t - \varphi) = I_0 \cos\left(\omega_в t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (6.12)$$

где $I_0 = q_0\omega_в$ – амплитуда тока

Для расчета падения напряжения на катушке индуктивности используют выражение для ЭДС самоиндукции, но с противоположным знаком $U_L = L\,dI/dt$. Подставляя сюда выражение (6.12), получим:

$$U_L = -Lq_0\omega_в^2 \cos(\omega_в t - \varphi) = U_{0L} \cos(\omega_в t - \varphi + \pi), \qquad (6.13)$$

где $U_{0L} = q_0 L\omega_в^2$ – амплитудное значение напряжения на катушке индуктивности.

Теперь можно проанализировать фазы колебаний напряжений на элементах контура: на конденсаторе, катушке индуктивности и резисторе.

Напряжение на конденсаторе можно найти из (6.11):

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C}\cos(\omega_в t - \varphi) = U_{0C} \cos(\omega_в t - \varphi), \qquad (6.14)$$

где $U_{0C} = q_0/C$ – амплитуда напряжения на конденсаторе. Из (6.14) и (6.13) видно, что напряжения на конденсаторе и на катушке индуктивности колеблются в противофазе.

Напряжение на резисторе находим из закона Ома и (6.12):

$$U_R = IR = q_0\omega_в R\cos\left(\omega_в t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = U_{0R} \cos\left(\omega_в t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (6.15)$$

где $U_{0R} = q_0\omega_в R$ – амплитуда напряжения на резисторе. Из (6.15) и (6.14) видно, что напряжение на резисторе опережает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ напряжение на конденсаторе.

Так как элементы контура соединены последовательно (см. рис.18), то напряжение на клеммах источника есть сумма напряжений на конденсаторе, катушке и резисторе. Но складывать такие напряжения надо с учетом фаз, то есть использовать фазовую диаграмму.

Из рис. 19 видно, что

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\left(U_{0C} - U_{0L}\right)^2 + U_{0R}^2} \qquad (6.16)$$

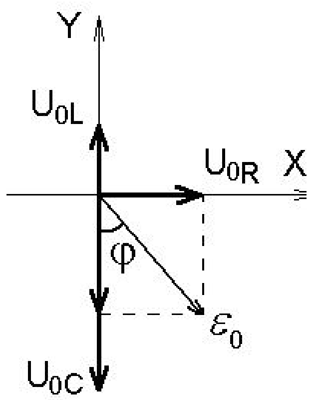


Рис.19. Фазовая диаграмма напряжений

Подставив в (6.16) выражения для амплитуд напряжений из (6.13), (6.14) и (6.15), получим выражение – **амплитудно-частотную характеристику для заряда**

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\left(1/C - L\omega_в^2\right)^2 + \omega_в^2 R^2}}$$

или

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{L\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_в^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_в^2}} \qquad (6.17)$$

Запаздывание колебаний заряда по фазе от колебаний внешней ЭДС находим как угол в треугольнике из рис.19:

$$tg\varphi = \frac{U_{0R}}{U_{0C} - U_{0L}} = \frac{\omega_в R}{1/C - L\omega_в^2} = \frac{2\omega_в\beta}{\omega_0^2 - \omega_в^2} \qquad (6.18)$$

Если (6.16) разделить на амплитуду тока I_0 из (6.12), то можно найти **полное сопротивление цепи или импеданс**:

$$Z = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = \sqrt{\left(X_C - X_L\right)^2 + R^2} = \sqrt{\left(1/\omega_в C - L\omega_в\right)^2 + R^2} \qquad (6.19)$$

где $X_L = U_{0L}/I_0 = L\omega_в$ – реактивное индуктивное сопротивление;

$X_C = U_{0C}/I_0 = 1/\omega_в C$ – реактивное емкостное сопротивление;

$R = U_{0R}/I_0$ – активное сопротивление резистора.

Выражение $X = X_C - X_L$ называют **полным реактивным сопротивлением** цепи.

Из (6.19) можно найти выражение, называемое **амплитудно-частотной характеристикой для тока**:

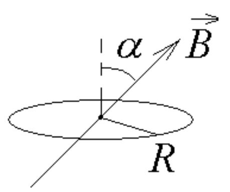
$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\left(1/\omega_в C - L\omega_в\right)^2 + R^2}}. \qquad (6.20)$$

Анализируя амплитудно-частотные характеристики (6.17) и (6.20) для заряда и тока, можно найти **резонансные частоты**, при которых амплитуды q_0 и I_0 достигают максимума:

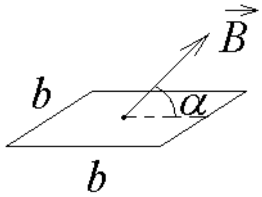
$$\omega_{рез\,q} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \qquad и \qquad \omega_{рез\,I} = \omega_0 \qquad (6.21)$$

Из (6.21) видно, что резонансная частота для заряда на конденсаторе меньше, чем для тока. Но **если затухание слабое**, т.е. β ω_0, то эти частоты можно приблизительно считать равными.

Задачи для работы на практическом занятии.

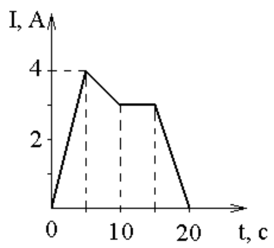


6.1. Круговой проводящий виток радиуса R = 1 м пронизывает однородное магнитное поле под углом α = 60° к нормали витка. Индукция магнитного поля меняется со временем по закону $B(t) = At^5$, где A = 3 Тл/с^5. Найти модуль э.д.с. индукции в контуре в момент времени t = 2 с   Ответ: 376,8 В



6.2. Квадратный проводящий контур со стороной b = 50 см пронизывает однородное магнитное поле под углом α =30° к плоскости контура. Индукция магнитного поля меняется со временем по закону $B(t) = At^3$, где А = 4 Тл/с^3. Найти модуль э.д.с. индукции в контуре в момент времени t = 3 с.   Ответ: 13,5 В

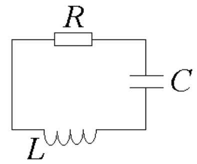
6.3. По проводящему контуру индуктивностью L течет ток I. Найти модуль э.д.с. самоиндукции в контуре в момент времени t = 2 с, если и ток и индуктивность изменяются со временем по законам $L(t) = At^2$ и $I(t) = Bt$, где А = 3 Гн/с^2; В = 4 А/с   Ответ: 144 В;



6.4э. В катушке с индуктивностью L = 1 Гн течет ток, изменяющийся со временем так, как показано на рисунке. Найти модуль среднего значения ЭДС самоиндукции в интервале времени от t_1 = 0 до t_2 = 20 с.
а) 0,8 В; б) 0,3 В; в) 0,2 В; г) 0;

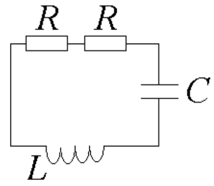
6.5э. Рамка с площадью S = 10^{-2} м^2 расположена перпендикулярно линиям индукции магнитного поля. Величина индукции меняется в зависимости от времени по закону $B = \left(2 + 5t^2\right)\cdot 10^{-2}$ Тл. Чему равен магнитный поток сквозь рамку?

а) 0; б) $\Phi = \left(2 + 5t^2\right)\cdot 10^{-4}$ Вб; в) $10t \cdot 10^{-4}$ Вб; г) $\left(2t + 5t^3/3\right)\cdot 10^{-4}$ Вб.



6.5. В контуре совершаются свободные колебания, при которых заряд на конденсаторе изменяется во времени по закону $q = q_0 \exp(-4t)\sin(3t)$, где $q_0 = 1$ мкКл. Найти логарифмический декремент затухания контура θ. Каким станет период колебаний, если уменьшить сопротивление R до нуля?

Ответы: θ=8,37, T = 1,256 с.

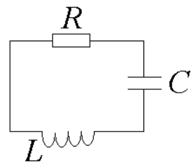


6.6. В контуре совершаются свободные колебания, при которых заряд на конденсаторе изменяется во времени по закону $q = q_0 \exp(-5t)\sin 4(3t)$, где $q_0 = 3$ мкКл. Каким станет время релаксации колебаний, если:

а) одно сопротивление R убрать из контура?

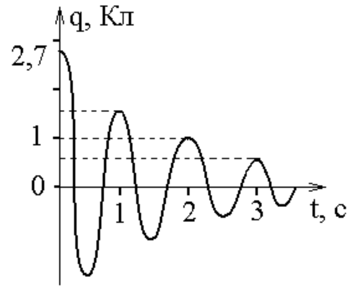
б) добавить последовательно еще одно сопротивление R?

Ответы: а) 0,4 с; б) 0,133 с;



6.7. В контуре совершаются свободные слабозатухающие колебания, при которых заряд на конденсаторе изменяется во времени по закону $q = q_0 e^{-0,1t} \cdot \sin(3t)$, где $q_0 = 5$ мКл. Во сколько раз уменьшится энергия контура за $t = 1$ с?

Ответ: 1,22 раза

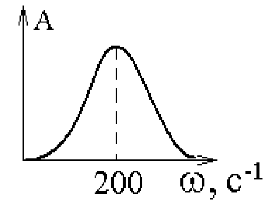


6.8э. На рисунке изображен график затухающих колебаний электрического заряда на конденсаторе, описываемый уравнением

$$q(t) = A_0 e^{-t/\tau} \sin(\omega_1 t + \varphi).$$

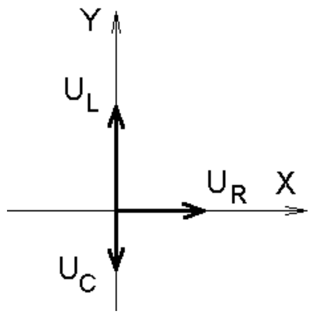
Определите время релаксации τ (в сек).

а) 1 с; <u>б) 2 с</u>; в) 3 с; г) не хватает данных;



6.9э. На рисунке изображена резонансная кривая для тока в катушке индуктивности колебательного контура, состоящего из конденсатора с емкостью C, катушки с индуктивностью L и резистора с сопротивлением R. Если C = 5 мкФ, то индуктивность L равна:

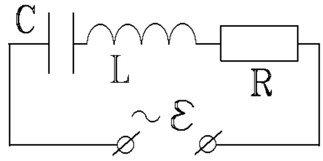
а) 40 Гн; <u>б) 5 Гн</u>; в) 2,5 Гн; г) не хватает данных



6.10э. Сопротивление, катушка индуктивности и конденсатор соединены последовательно и подключены к источнику переменного тока, изменяющегося по закону $I = 0,1\cos(3,14t)$ (А). На рисунке представлена фазовая диаграмма падений напряжений на указанных элементах. Амплитудные значения напряжений соответственно равны: на сопротивлении $U_R = 4$ В, на катушке индуктивности $U_L = 5$ В, на конденсаторе $U_C = 2$ В. Установите соответствие между сопротивлением и его численным значением.

1. Активное сопротивление 2. Реактивное сопротивление 3. Полное сопротивление	а) 40 Ом б) 30 Ом; в) 50 Ом; г) 20 Ом

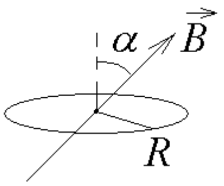
Ответ: 1. – а); 2 – б); 3 – в)



6.11. Индуктивность контура L = 0,6 Гн, его ёмкость C = 1 мкФ. При частоте внешней ЭДС $\omega = 1000$ с$^{-1}$ амплитуда тока в три раза меньше резонансной. Найти активное сопротивление контура.

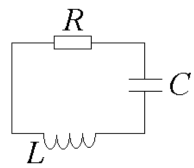
Ответ: $R = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) = 141{,}4$ Ом.

Задачи для самостоятельной работы.

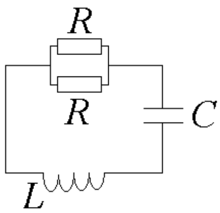


6.12с. Круговой проводящий виток радиуса R = 2 м пронизывает однородное магнитное поле под углом α = 30° к нормали витка. Индукция магнитного поля меняется со временем по закону $B(t) = At^4$, где A = 5 Тл/с^4. Найти модуль э.д.с. индукции в контуре в момент t = 2 с.

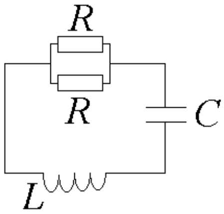
Ответ: 1740 В



6.13с. В контуре совершаются свободные колебания, при которых заряд на конденсаторе изменяется во времени по закону $q = q_0 \exp(-4t)\sin(bt)$, где $q_0 = 3$ мкКл. Найти циклическую частоту колебаний, если логарифмический декремент затухания контура равен θ = 2. Ответ: 12,56 с$^{-1}$



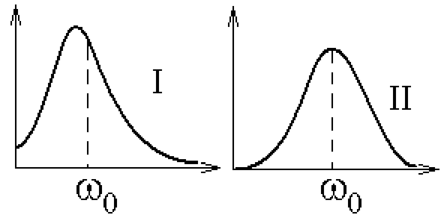
6.14с. В контуре совершаются свободные колебания, при которых заряд на конденсаторе изменяется во времени по закону $q = q_0 \exp(-4t)\sin(3t)$, где $q_0 = 2$ мкКл. Каким станет время релаксации колебаний, если:
а) добавить параллельно еще одно сопротивление R?
б) убрать одно сопротивление R? Ответы: а) 0,375 с; б) 0,125 с;



6.15с. В контуре совершаются свободные колебания, при которых заряд на конденсаторе изменяется во времени по закону $q = q_0 \exp(-4t)\sin(3t)$, где $q_0 = 4$ мкКл.

Каким станет коэффициент затухания, если:
а) убрать одно сопротивление R?
б) добавить параллельно еще одно сопротивление R?

Ответы: а) 8 с$^{-1}$; б) 2,67 с$^{-1}$.

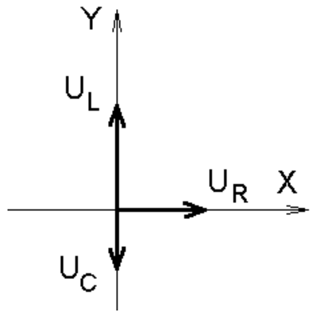


6.16э. На двух рисунках представлены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) разных величин в колебательном контуре, состоящем из конденсатора с емкостью C, катушки с индуктивностью L и резистора с сопротивлением R. Рисунки I и II могут соответствовать АЧХ следующих величин:

а) I - заряд на конденсаторе; II- ток в катушке;

б) I - заряд на конденсаторе; II- напряжение на конденсаторе;

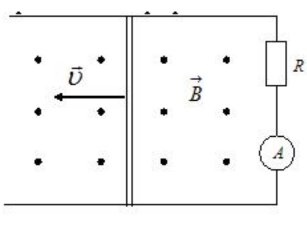
в) I - ток в катушке; II- заряд на конденсаторе;



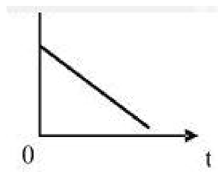
6.17э. Сопротивление, катушка индуктивности и конденсатор соединены последовательно и подключены к источнику переменного напряжения, изменяющегося по закону $U = U_0 \cos(\omega t)$ (В). На рисунке (см. задачу 6-4к) представлена фазовая диаграмма падений напряжений на указанных элементах. Установите соответствие между амплитудными значениями напряжений на этих элементах и амплитудным значением напряжения источника.

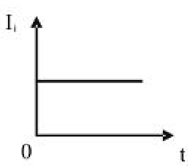
1. U_R = 4 В, U_L = 5 В, U_C =2 В 2. U_R = 2 В, U_L = 1 В, U_C =2 В	а) 5В б) $\sqrt{5}$ В в) 11 В

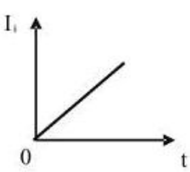
Ответ: 1 – а); 2 – б)

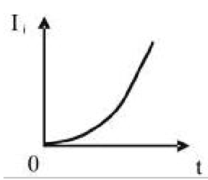


6.18э. В однородном магнином поле, с равномерно возрастающей скоростью перемещается проводящая перемычка (см. рис.). Если сопротивлением перемычки и направляющих можно пренебречь, то зависимость индукционного тока от времени можно представить графиком ...

а) 

б) 

в) 

г) 

Занятие 7
Уравнения Максвелла.
Электромагнитные волны. Вектор Пойнтинга.

Переменное магнитное поле с индукцией B порождает в пространстве вихревое электрическое поле с напряженностью E, для которого теорема о циркуляции в интегральном и дифференциальном виде записывается так:

$$\int Edl = -\int \frac{\partial B}{\partial t} dS \qquad \text{и} \qquad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{7.1}$$

Вихревое магнитное поле с напряженностью H порождается в пространстве токами проводимости с плотностью j и переменным электрическим полем с индукцией D. Теорема о циркуляции вектора H в интегральном и дифференциальном виде выглядит так:

$$\int Hdl = \int jdS + \int \frac{\partial D}{\partial t} dS \qquad \text{и} \qquad \operatorname{rot} H = j + \frac{\partial D}{\partial t}, \tag{7.2}$$

где $\frac{\partial D}{\partial t} = j_{см}$ – называют *плотностью тока смещения.*

Если к уравнениям (7.1) и (7.2), являющимся теоремами о циркуляции векторов E и H, добавить теоремы Гаусса в интегральном и дифференциальном виде для векторов D и B

$$\int DdS = \int \rho dV \qquad \text{и} \qquad \operatorname{div} D = \rho, \tag{7.3}$$

где ρ – объемная плотность сторонних зарядов.

$$\int BdS = 0 \qquad \text{и} \qquad \operatorname{div} B = 0, \tag{7.4}$$

то получится *система уравнений Максвелла* (7.1) – (7.4), которая дополняется **материальными** уравнениями

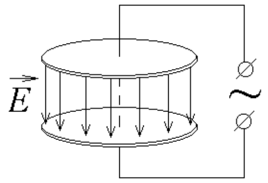
$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E, \qquad B = \mu\mu_0 H, \qquad j = \sigma E, \tag{7.5}$$

которые справедливы в *изотропном неферромагнитном веществе в слабых полях.* Здесь ε - диэлектрическая проницаемость среды, μ - магнитная проницаемость среды, σ - удельная проводимость среды.

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м– электрическая постоянная.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Пример задачи



Между обкладками плоского воздушного конденстатора создано однородное электрическое поле, напряженность которого меняется со временем по закону $E = E_0 \sin(2\pi t)$. Найти модуль ротора напряженности магнитного поля (или плотность тока смещения) внутри конденсатора в момент времени $t = 0{,}5$ с, если $E_0 = 1$ кВ/м.

Решение:

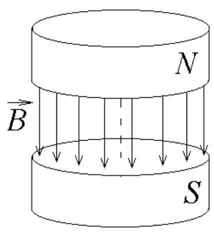
Между обкладками конденсатора нет токов проводимости, т.е. $j = 0$. Так как конденсатор воздушный, то диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 1$, следовательно из формулы (7.3) $D = \varepsilon_0 E$. По формуле (7.2) найдем модуль ротора H в момент времени $t = 0{,}5$ с:

$$\left|\mathrm{rot}\, H\right| = \left|\frac{\partial D}{\partial t}\right| = \varepsilon_0 \left|\frac{\partial E}{\partial t}\right| = \varepsilon_0 E_0 \left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right)\right| = \varepsilon_0 E_0 \frac{2\pi}{\tau}\left|\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right| =$$

$$= 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 = 55{,}6 \cdot 10^{-9} \text{ А/м}^2$$

Ответ: 55,6 нА/м^2

Пример задачи.



Между полюсами магнита создано однродное магнитное поле, индукция которого зависит от времени по закону $B = B_0 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$. Найти модуль напряженности электрического поля между полюсами на расстоянии $r = 5$ см от оси магнита в момент времени $t = \frac{1}{3}$ с, если $B_0 = 2$ Тл.

Решение:

По формуле (7.1) в интегральном виде найдем циркуляцию E по замкнутому контуру в виде окружности радиуса r с осью, совпадающей с осью магнита, и выразим модуль напряженности:

$$\int E dl = E \cdot 2\pi r = -\int \frac{\partial B}{\partial t} dS = B_0 \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \pi r^2$$

$$E = B_0 \frac{\pi}{4} r \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}05 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0{,}039 \textbf{ В/м}$$

Ответ: 39 мВ/м

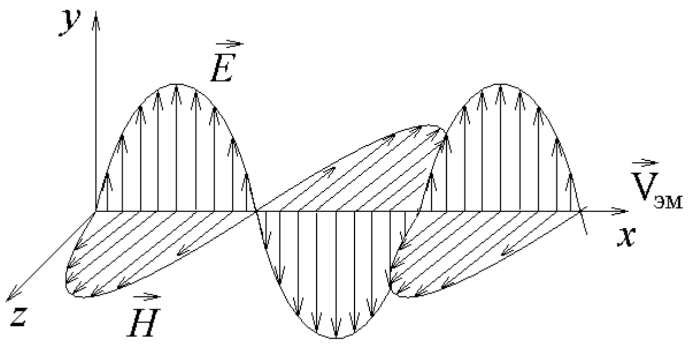


Рис.20.

Пространственная конфигурация электромагнитного поля в волне изображена на рис.20, из которого видно, что вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$, вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ и фазовая скорость $\vec{v}_{эм}$ составляют **правую тройку векторов**.

Уравнение **плоской** электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси *x,* записывается как для вектора $\vec{E}$, так и для $\vec{H}$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{v_{эм}^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{v_{эм}^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \qquad v_{эм} = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} \tag{7.6}$$

где μ – магнитная проницаемость среды (μ=1 для вакуума и воздуха), ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Решение уравнения (7.6) в общем виде есть произвольная функция, зависящая от выражения $\left(t - \frac{x}{v_{эм}}\right)$, т.е. $\quad f(t,x) = f\left(t - \frac{x}{v_{эм}}\right)$

Частным случаем решения (7.6) является уравнение плоской электромагнитной волны:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos(\omega t - kx) \\ H &= H_0 \cos(\omega t - kx) \end{aligned}, \tag{7.7}$$

где ω – циклическая частота колебаний векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, $k = \frac{\omega}{v_{эм}}$ – волновое число.

Из (7.7) следует, что колебания электрического и магнитного векторов происходят в одной фазе с амплитудами E_0 и H_0. Величины этих амплитуд связаны соотношением:

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \qquad \text{или} \qquad E_0\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_0\sqrt{\mu\mu_0}, \tag{7.8}$$

откуда следует равенство объемных плотностей энергии магнитного и электрического поля в волне:

$$w_{эл} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H_0^2}{2} = w_{магн} \tag{7.9}$$

Вектор Пойнтинга (плотность потока энергии электромагнитной волны)

$$J_w = \left[E \times H \right], \qquad (7.10)$$

направлен по скорости волны $\mathrm{v}_{эм}$ (см. рис.20).

Вектор Пойнтинга можно выразить через объемную плотность электромагнитной энергии $w_{эм} = w_{эл} + w_{магн}$:

$$J_w = w_{эм} \cdot \mathrm{v}_{эм} \qquad (7.11)$$

Энергия, переносимая электромагнитной волной через произвольную поверхность S за время τ, находится как

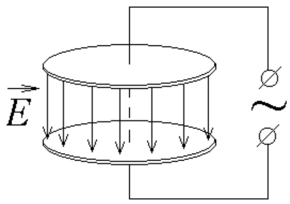
$$W = \int\limits_S \int\limits_0^\tau J_w dSdt \qquad (7.12)$$

Электромагнитная волна, падающая под углом α к нормали поверхности и **частично отражаемая** ею, оказывает на нее давление:

$$p = \frac{\left(1+r\right) J_w \cos^2 \alpha}{c}, \qquad (7.13)$$

где r – коэффициент отражения.

Задачи для работы на практическом занятии.



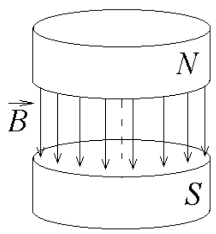
7.1. Между обкладками плоского воздушного конденсатора создано переменное однородное электрическое поле. Найти плотность тока смещения внутри конденсатора в момент t = 0,5 с, если напряженность электрического поля меняется со временем по закону

а) $E = At^2$, где А = 2 кВ/м·с^2;

б) $E = A\cos\left(\omega t\right)$, где А = 3 кВ/м, $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ с$^{-1}$;

Ответы: а) 70,8 нА/м^2; б) 29,5 нА/м^2

7.2. Между полюсами магнита создано переменное однородное магнитное поле. Найти модуль электрической силы, действующей на заряженную частицу с зарядом q = 4 мкКл, находящуюся на расстоянии 1 см от оси магнита в момент t = 2 с. Индукция магнитного поля зависит от времени по закону



а) $B\left(t\right) = B_0 \exp\left(-\alpha t\right)$, где B_0 = 4 Тл, α = 0,01 с$^{-1}$;

б) $B = B_0 \sin^2\left(\omega t\right)$, где B_0 = 3 Тл, $\omega = \dfrac{\pi}{6}$ с$^{-1}$.

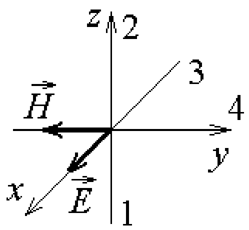
Ответы: а) $7{,}84 \cdot 10^{-10}$ Н; б) $2{,}7 \cdot 10^{-8}$ Н

7.3. Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в диэлектрике, описывается волновой функцией $\mathrm{u} = \mathrm{u}_0\cos(\mathrm{ax} - \mathrm{bt})$, где a = 0,04 м $^{-1}$, $\mathrm{b} = 6\cdot 10^6\ \mathrm{c}^{-1}$. Найти диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика . Скорость света в вакууме равна $\mathrm{c} = 3\cdot 10^8$ м/с.

Ответ: ε = $(ac/b)^2$ = 4.

7.4э. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси ОХ, имеет вид $\xi = 0{,}01e^{i\left(10^3 t - 2x\right)}$. Тогда скорость распространения волны (в м/с) равна ...

а) 1000 м/с; б) 2 м/с; <u>в) 500 м/с</u>; г) 0,002 м/с;



7.5э. На рисунке показана ориентация векторов напряженности электрического $\left(E\right)$ и магнитного $\left(H\right)$ полей в электромагнитной волне. Вектор плотности потока энергии электромагнитного поля ориентирован в направлении ...

<u>а) 1</u>; б) 2; в) 3; г) 4;

7.6э. В электромагнитной волне векторы напряженности электрического и магнитного полей колеблются так, что разность фаз их колебаний равна ...

а) 0; б) π; в) π/2; г) π/4.

7.7э. На черную пластинку падает свет. Если объемную плотность электромагнитной энергии волны увеличить в 2 раза, а площадь пластины уменьшить в 2 раза, то давление света на пластину...

а) в 2 раза уменьшится; <u>б) в 2 раза увеличится</u>;

в) в 4 раза увеличится; г) в 4 раза уменьшится; д) не изменится.

7.8э. Параллельный пучок света падал на зачерненную плоскую поверхность под углом 45° к нормали и производил на нее давление *p*. Какое давление будет производить тот же пучок света, падая нормально на зеркальную плоскую поверхность?

а) *p* <u>б) 2*p*</u> в) 4*p* г) 8*p*

7.9э. Следующая система уравнений Максвелла:

$$\int\limits_{(L)} Edl = -\int\limits_{(S)} \frac{\partial B}{\partial t} dS\,;\ \int\limits_{(L)} Hdl = \int\limits_{(S)} \frac{\partial D}{\partial t} dS\,;\ \int\limits_{(S)} DdS = 0\,;\ \int\limits_{(S)} BdS = 0$$

всегда справедлива для переменного магнитного поля ...

а) при наличии заряженных тел и токов проводимости;

<u>б) в отсутствие заряженных тел и токов проводимости;</u>

в) в отсутствие заряженных тел;

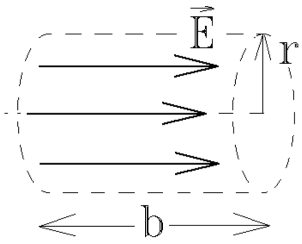
г) в отсутствие токов проводимости;

7.10э. В кольцо из диэлектрика вдвигают магнит. В этом случае в диэлектрике...

а) порождается вихревое электрическое поле;

б) ничего не происходит;

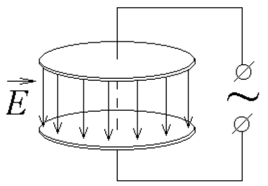
в) порождается электростатическое поле;



7.11. Напряжённость однородного аксиально симметричного электрического поля меняется со временем по закону: $E = \alpha \cdot t^2$, где $\alpha = 10^8$ В/(м$\cdot$с^2). Какая энергия пересечёт цилиндрическую поверхность радиуса r = 1 см и длины b = 1 м за промежуток времени $0 \le t \le 1$ с?

Ответ: $W = \pi \, \varepsilon_0 \, \alpha^2 \, t^4 r^2 b \, / \, 2 = 13{,}9$ Дж.

Задачи для самостоятельной работы.

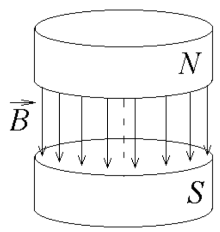


7.12с. Между обкладками плоского воздушного конденсатора создано переменное однородное электрическое поле. Найти модуль индукции магнитного поля на расстоянии 5 см от оси конденсатора в момент t = 0,25 с, если напряженность электрического поля меняется со временем по закону

а) $E = E_0 \exp(-\alpha t)$, где E_0 = 3 кВ/м; $\alpha = 0{,}1$ с$^{-1}$

б) $E = E_0 \cos^2(\omega t)$, где E_0 = 5 кВ/м, $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ с$^{-1}$;

Ответы: а) $8{,}13 \cdot 10^{-17}$ Тл; б) $3{,}08 \cdot 10^{-14}$ Тл



7.13с. Между полюсами магнита создано переменное однородное магнитное поле. Найти модуль электрической силы, действующей на заряженную частицу с зарядом q = 5 мкКл, находящуюся на расстоянии 2 см от оси магнита в момент t = 2 с. Индукция магнитного поля зависит от времени по закону

а) $B(t) = At^3$, где A = 6 Тл/с^3;

б) $B = B_0 \sin(\omega t)$, где B_0 = 3 Тл, $\omega = \dfrac{\pi}{6}$ с$^{-1}$.

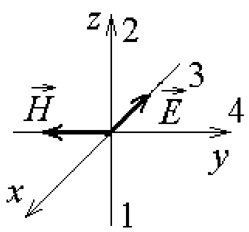
Ответы: а) 3,6 мкН; б) 1,96 мкН

7.14э. Следующая система уравнений Максвелла:

$$\int\limits_{(L)} Edl = -\int\limits_{(S)} \frac{\partial B}{\partial t} dS\ ;\ \int\limits_{(L)} Hdl = \int\limits_{(S)} \frac{\partial D}{\partial t} dS\ ;\ \int\limits_{(S)} DdS = \sum q_i\ ;\ \int\limits_{(S)} BdS = 0$$

всегда справедлива для переменного магнитного поля ...
а) при наличии заряженных тел и токов проводимости;
б) в отсутствие заряженных тел и токов проводимости;
в) в отсутствие заряженных тел;
г) в отсутствие токов проводимости;

7.15э. В кольце из металла находится магнит. В этом случае в кольце...
а) порождается вихревое электрическое поле;
б) ничего не происходит;
в) порождается электростатическое поле;



7.16э. На рисунке показана ориентация векторов напряженности электрического (E) и магнитного (H) полей в электромагнитной волне. Скорость волны направлена по ... а) 1; б) 2; в) 3; г) 4;

7.17э. Параллельный пучок света падал на зеркальную плоскую поверхность под углом 45° к нормали и производил на нее давление p. Какое давление будет производить тот же пучок света, падая нормально на зачерненную плоскую поверхность?
а) p б) $2p$ в) $4p$ г) $8p$

8. Дополнительная глава. **Использование теоремы Гаусса в дифференциальной и интегральной формах.**

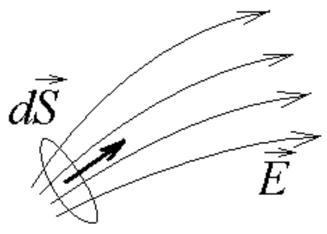


Рис.21

Электрическое поле можно изобразить графически, нарисовав силовые линии. *Силовая линия* – это линия в силовом поле, в каждой точке которой напряженность электрического поля E направлена по касательной. Следовательно, если поместить покоящуюся заряженную частицу в электрическое поле, то она начнет двигаться вдоль силовой линии.

Модуль напряженности E на графическом изображении поля можно определить, как *густоту силовых линий,* т.е число линий, пересекающих единичную поперечную площадку:

$$E = \frac{dN}{dS_{\perp}}. \qquad (8.1)$$

Тогда число силовых линий, пересекающих площадку можно найти следующим образом:

$$dN = E \cdot dS_{\perp} = E \cdot dS = d\Phi_E, \qquad (8.2)$$

где вектор dS по модулю равен площади dS и направлен по нормали к этой площадке. Величина $d\Phi_E$ в формуле (8.2) называется потоком вектора напряженности электрического поля E через площадку dS. Чтобы рассчитать поток через большую площадь S любой формы надо проинтегрировать формулу (8.2):

$$\Phi_E = \int_S E dS \qquad (8.3)$$

Можно доказать теорему Гаусса для напряженности электрического поля в вакууме:

$$\Phi_E = \int_S E dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \qquad (8.4)$$

– поток вектора напряженности электрического поля E сквозь произвольную замкнутую поверхность, равен сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на ε_0, где, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, ρ – плотность заряда.

С помощью теоремы Остроградского для вектора напряженности электрического поля

$$\int_S E dS = \int_V \operatorname{div} E dV \tag{8.5}$$

можно получить теорему Остроградского-Гаусса в дифференциальном виде для напряженности электрического поля в вакууме:

$$\int_V \operatorname{div} E dV = \int_S E dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{8.6}$$

Наряду с теоремой Гаусса для напряженности электрического поля часто применяют теорему Гаусса для вектора электрической индукции D, которая включена в систему уравнений Максвелла (7.3)

$$\int D dS = \int \rho dV = \sum q_i \qquad \text{или} \qquad \operatorname{div} D = \rho .$$

В формулах (8.5) и (8.6) используется дифференциальный оператор div или "дивергенция", который для вектора E записывается так:

$$\operatorname{div} E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} . \tag{8.7}$$

Пример задачи.

Напряженность электростатического поля задается формулой $E = i \cdot Ax^3 y^4 + j \cdot By^2 x^5$, где A = 3 В/м^8, B = 4 В/м^8. Используя теорему Гаусса в дифференциальной форме, найдите объемную плотность заряда в точке $P(x_0, y_0)$, где $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м.

Решение:

Из векторного выражения для E видно, что

$$E_x = Ax^3 y^4 \quad \text{и} \quad E_y = By^2 x^5$$

По формуле (8.7) вычислим $\operatorname{div} E$:

$$\operatorname{div} E = \frac{\partial}{\partial x}\left(Ax^3 y^4\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(By^2 x^5\right) = 3Ax^2 y^4 + 2Byx^5 = 3 \cdot 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 160 \text{ В/м}$$

Из формулы (8.6) рассчитаем ρ

$$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} E = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 160 = 1{,}42 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^3.$$

Ответ: 1,42 нКл/м^3

Пример задачи.

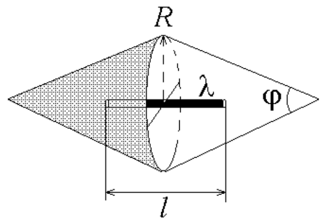


Рис.22

Из двух круговых прямых конусов с углом раствора $\varphi = 10°$ и радиусом основания $R = 2$ см составлена фигура, вдоль оси симметрии которой помещен равномерно заряженный отрезок длиной $l = 6$ см с линейной плотностью заряда $\lambda = 2$ мкКл/м. Середина отрезка совпадает с центром фигуры. Найти поток вектора электрического смещения через поверхность одного из конусов.

Решение:

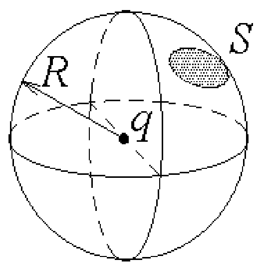
В общем случае расчет потока электрического смещения через заштрихованную область конуса по формуле $\int DdS$ вызывает огромные трудности. Но заряженный стержень расположен на оси конуса симметрично относительно плоскости основания конуса. Таким образом, можно сделать вывод, что поток через заштрихованную область равен *половине потока через всю поверхность* фигуры на рис.22.

Поток вектора D через замкнутую поверхность можно рассчитать по закону Остроградского-Гаусса по формуле (7.3):

$$\int_S DdS = \sum q_i = \lambda \cdot l = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}06 = 120 \text{ нКл.}$$

Откуда следует ответ: $\Phi_D = \dfrac{120}{2} = 60$ нКл

Пример задачи



Заряд $q = 4$ нКл помещен в центр сферы радиуса $R = 2$ м. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь небольшую область поверхности сферы площадью $S = 50$ см^2.

Решение:

Напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом, направлена вдоль радиуса сферы, т.е. вдоль нормали к поверхности сферы. Угол между вектором E и любой площадкой на сфере dS равен 0°. Модуль напряженности на поверхности сферы равен $E = \dfrac{kq}{R^2}$. Поток вектора E можно легко рассчитать по формуле (8.3):

$$\Phi_E = \int_S EdS = \int_S \frac{kq}{R^2} dS \cos 0^0 = \frac{kqS}{R^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-9} \cdot 50 \cdot 10^{-4}}{2^2} = 0{,}045 \text{ В·м.}$$

Задачи для работы на практическом занятии.

8.1. Напряженность электростатического поля задается формулой

а) $E = i \cdot Ax^2 + j \cdot By^3$, где A = 2 В/м^3, B = 3 В/м^4;

б) $E = i \cdot 3Ax^2y + j \cdot Ax^3$, где A = 5 В/м^4.

Используя теорему Гаусса в дифференциальной форме, найдите объемную плотность заряда в точке $P\left(x_0, y_0\right)$, где $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м.

Ответы: а) 0,354 нКл/м^3; б) 0,266 нКл/м^3.

8.**2** Напряженность электростатического поля задается формулой

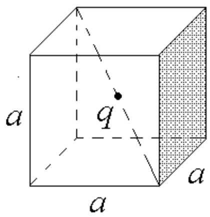
а) $E = i \cdot A\sin\left(Bx\right) + j \cdot C\cos\left(Dy\right)$;

б) $E = i \cdot A\exp\left(-Bx\right) + j \cdot C\exp\left(-Dy\right)$.

Используя теорему Гаусса в дифференциальной форме, найдите объемную плотность заряда в точке $P\left(x_0, y_0\right)$.

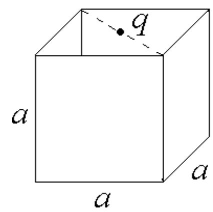
$A = 1$ В/м, $B = 2$ рад/м, $C = 3$ В/м, $D = 4$ рад/м, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м.

Ответы: а) – 0,11 нКл/м^3; б) $-2{,}4 \cdot 10^{-12}$ Кл/м^3



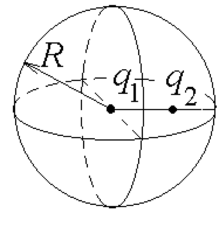
8.3 Заряд q помещен в центр куба со стороной a. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь одну грань. $q = 1$ нКл, $a = 1$ см.

Ответ: 19 В·м



8.4 Заряд q помещен в центр верхней грани куба со стороной a. Найдите поток вектора электрического смещения через все остальные грани.

$q = 1$ нКл, $a = 1$ см. **Ответ: 0,50 нКл**

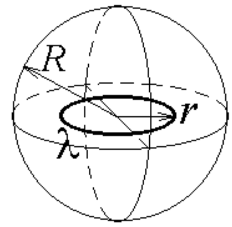


8.5 Заряд q_1 помещен в центр сферы, а заряд q_2 – на расстоянии $R/2$ от центра. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность сферы. $q_1 = 5$ нКл, $q_2 = 3$ нКл, $R = 3$ м.

Ответ: 904 В·м

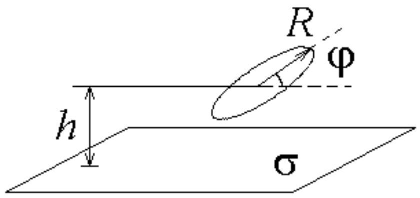
8.6э. Точечный заряд +q находится в центре сферической поверхности. Если добавить заряд +q за пределами сферы, то поток вектора напряженности электростатического поля E через поверхность сферы

а) увеличится в 2 раза; б) уменьшится в 2 раза; в) не изменится



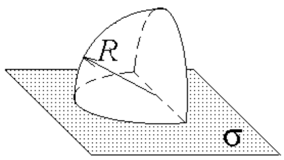
8.7. Внутрь сферы радиуса R помещено равномерно заряженное кольцо радиуса r и линейной плотностью заряда λ. Центр кольца совпадает с центром сферы. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность сферы.

$\lambda = 4$ нКл/м, $R = 2$ м, $r = 1$ см. Ответ: 28 В·м



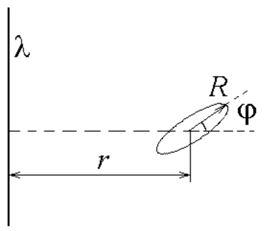
8.8. Над бесконечной плоской поверхностью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ, расположена круглая пластинка, центр которой лежит на расстоянии h. Плоскости пластинки и поверхности расположены под углом φ. Найти поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность пластинки.

$\sigma = 1$ нКл/м^2, $\varphi = 30^0$, $R = 1$ см, $h = 5$ м. Ответ: 15 мВ·м



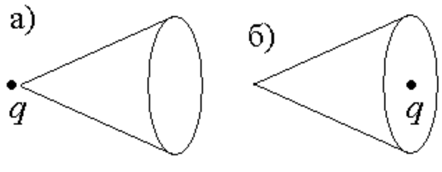
8.9 Электрическое поле создается бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда σ. На плоскость положили четверть сферы радиуса R. Найти поток вектора электрического смещения через поверхность четверти сферы.

$\sigma = 2$ мКл/м^2, $R = 2$ см. Ответ: 628 нКл



8.10 Электрическое поле создается бесконечной прямой равномерно заряженной нитью с линейной плотностью заряда λ. На большом удалении r расположена круглая пластинка радиуса R. Угол между плоскостью пластинки и перпендикуляром к нити, проходящим через центр пластинки, равен φ. Найти поток вектора электрического смещения через поверхность пластинки. $\lambda = 1$ мКл/м, $\varphi = 30^0$, $R = 1$ см, $r = 12$ м, $h = 5$ м.

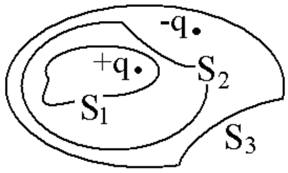
Ответ: 2,1 нКл



8.11э. Частица с зарядом q находилась у вершины конуса снаружи (рис.а). Ее переместили в центр основания (рис.б). При этом величина потока вектора напряженности электрического поля сквозь боковую поверхность конуса ...

а) увеличилась б) уменьшилась в) не изменилась

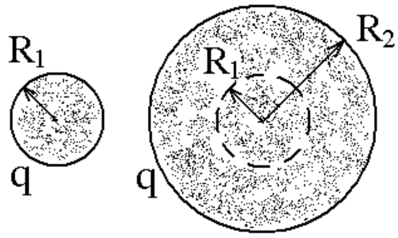
г) не хватает данных о соотношении высоты конуса и его радиуса



8.12э. Дана система точечных зарядов в вакууме и замкнутые поверхности S_1, S_2 и S_3. Поток вектора напряженности электростатического поля **равен нулю** через ...

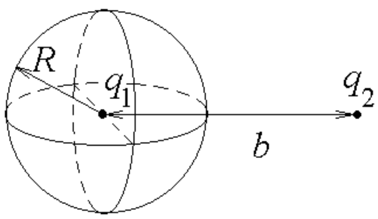
а) S_1; б) S_2; в) S_3; г) S_1 и S_3; д) нет такой поверхности

8.13э. Электрический заряд q распределен равномерно внутри сферы радиуса R_1. Радиус сферы увеличили до $R_2 = 2R_1$, и заряд равномерно распределился по новому объему. Во сколько раз уменьшился поток вектора напряженности электрического поля сквозь сферическую поверхность радиуса R_1.



1) не изменился 2) в 2 раза 3) в 4 раза 4) в 8 раз

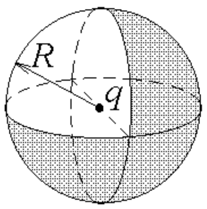
Задачи для самостоятельной работы.



8.14с. Заряд q_1 помещен в центр сферы, а заряд q_2 – на расстоянии b от центра. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность сферы.

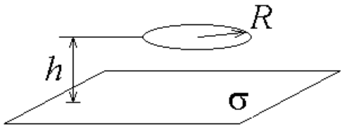
$q_1 = 5$ нКл, $q_2 = 3$ нКл, $R = 3$ м, $b = 5$ м.

Ответ: 565 В·м

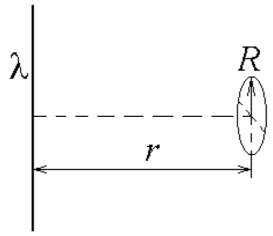


8.15с. Заряд q помещен в центр сферы радиуса R. Найдите поток вектора напряженности электрического поля сквозь три четверти сферы.

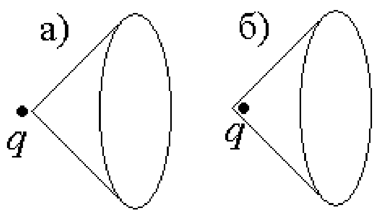
$q = 4$ нКл, $R = 1$ см. Ответ: 339 В·м



8.16с. Над бесконечной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ, в параллельной плоскости на расстоянии h расположен небольшой круг радиуса R. Найти поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность круга. $\sigma = 1$ нКл/м^2, $R = 3$ см, $h = 1$ м. Ответ: 160 мВ·м



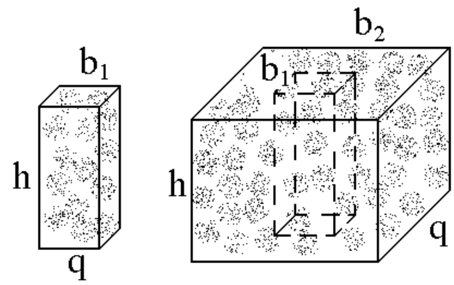
8.17с. Электрическое поле создается бесконечной прямой равномерно заряженной нитью с линейной плотностью заряда λ. На большом удалении r расположена круглая пластинка радиуса R. Нить проходит параллельно плоскости пластинки. Найти поток вектора электрического смещения через поверхность пластинки. $\lambda = 2$ мКл/м, $R = 1$ см, $r = 5$ м. Ответ: 20 нКл



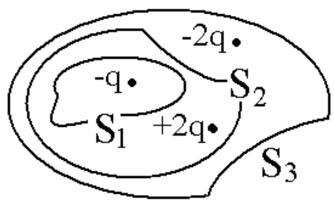
8.18э. Частица с зарядом q находилась у вершины конуса снаружи (рис.а). Ее переместили вдоль оси конуса в точку рядом с вершиной, но внутри (рис.б). При этом величина потока вектора напряженности электрического поля сквозь боковую поверхность конуса ...

а) увеличилась б) уменьшилась в) не изменилась
г) не хватает данных о соотношении высоты конуса и его радиуса

8.19э. Электрический заряд q распределен равномерно внутри параллелепипеда квадратного сечения $b_1 \times b_1$ и высотой h. Ребро квадратного сечения увеличили до $b_2 = 3b_1$, оставив высоту без изменения, и заряд равномерно распределился по новому объему. Во сколько раз уменьшился поток вектора напряженности электрического поля сквозь поверхность параллелепипеда с квадратным сечением $b_1 \times b_1$.



1) в 3 раза 2) в 9 раз 3) в 27 раз 4) не изменился



8.20э. Дана система точечных зарядов в вакууме и замкнутые поверхности S_1, S_2 и S_3. Поток вектора напряженности электростатического поля **равен нулю** через ...

а) S_1; б) S_2; в) S_3; г) S_1 и S_3; д) нет такой поверхности

8.21с. Напряженность электростатического поля задается формулой

$$E = i \cdot A\cos(Bx) + j \cdot C\exp(-Dy);$$

Используя теорему Гаусса в дифференциальной форме, найдите объемную плотность заряда в точке $P(x_0, y_0)$.

$A = 1$ В/м, $B = 2$ рад/м, $C = 3$ В/м, $D = 4$ м$^{-1}$, $x_0 = 1$ м, $y_0 = 2$ м.

Ответ: $-1{,}6 \cdot 10^{-11}$ Кл/м^3.