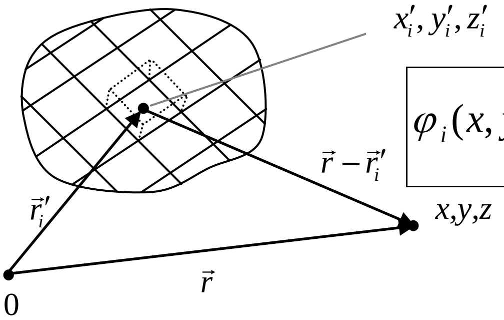
Горбунова О.Ю.
Кузнецов А.М.

Методические указания по проведению практических занятий по курсу общей физики: «Электричество и магнетизм»
(в теории и задачах)



$$\boxed{\varphi_i(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho(x'_i,y'_i,z'_i)\cdot\Delta x'_i\cdot\Delta y'_i\cdot\Delta z'_i}{\left|\vec r - \vec r'_i\right|}}$$

$$\boxed{\vec E(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int\limits_{V'}\frac{\rho(x',y',z')\cdot(\vec r - \vec r')}{\left|\vec r - \vec r'\right|^3}\cdot dx'\cdot dy'\cdot dz'}$$

Министерство образования науки России
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Тульский государственный университет»

О.Ю. Горбунова
А. М. Кузнецов

Методические указания по проведению практических занятий по курсу общей физики: «Электричество и магнетизм» *(в теории и задачах)*

Методическое пособие для студентов инженерных специальностей

Тула 2013

УДК 537
ББК 22.33
Г67

Горбунова О.Ю., Кузнецов А.М.
Г67

Методические указания по проведению практических занятий по курсу общей физики: «Электричество и магнетизм» ***(в теории и задачах)*****:** Методическое пособие для студентов инженерных специальностей. Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. 50 с.

Методическое пособие для студентов инженерных специальностей содержит задания для самостоятельной работы по курсу общей физики. Предлагаемые задачи надо рассматривать как хорошее дополнение к тому учебному материалу, который изучается на практических занятиях в аудитории. В каждом из разделов приведены подробные теоретические сведения с указанием основных законов и формул.

ББК 22.33

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Важнейшим фактором, обеспечивающим улучшение качества подготовки специалистов инженерных специальностей, является усвоение студентами технических вузов теоретических знаний по физике и умение применять их в практических упражнениях. Развитию практических навыков способствует решение задач. Это помогает студентам уяснить физический смысл явлений, закрепляет в памяти формулы, прививает способность практического применения теоретических знаний. Навыки, полученные при решении задач по курсу общей физики, будут полезны в дальнейшей профессиональной деятельности будущих специалистов.

Предлагаемое методическое пособие содержит задачи по восьми разделам курса общей физики «Электричество и магнетизм» известных авторов («Сборник задач по курсу общей физики» под редакцией М.С. Цедрика, «Сборник задач по общей физики» И.В. Савельев, «Сборник задач по общему курсу физики «Электричество и магнетизм» под редакцией И.А. Яковлева). В начале каждого раздела даны подробные теоретические сведения с указанием основных законов и формул, которые используются при решении задач. Затем, приводится содержание задач, предлагаемых студентам для самостоятельного решения. В конце раздела, в качестве примера, помещены решения некоторых задач.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Решение физической задачи заключается в установлении неизвестных связей между заданными и искомыми физическими величинами и определение последних. Установление же необходимых связей между величинами предполагает умение анализировать изложенную в задаче физическую ситуацию. В условии задачи всегда отражено какое-то физическое явление, и успех решения, зачастую, зависит от способности увидеть его и применить имеющиеся теоретические знания для описания этого явления. Это умение приобретается в процессе решения задач. Одновременно постепенно реализуется достижение более высокой цели - усвоение системы знаний по физике и её применение к решению задач. Необходимо помнить, что решение задач – творческий процесс, а умение решать задачи приобретается длительными и систематическими упражнениями.

При решении задач рекомендуется руководствоваться хорошо известными правилами.

1. Внимательно прочитайте условие задачи. Сделайте, если это возможно, краткую математическую запись её условия, проследите, чтобы все заданные величины были выражены в системе единиц СИ.
2. Если позволяет характер задачи, обязательно сделайте рисунок, поясняющий её сущность. Как правило, этот процесс сопровождается рассуждениями уже позволяющими выявить круг явлений, о которых идёт речь.
3. Помните, что все задачи решаются с помощью физических законов, описывающих физические явления. Попытайтесь вспомнить эти законы.
4. За редким исключением, каждая задача должна быть решена в общем виде, причём искомая величина должна быть выражена через заданные в задаче величины и возможные известные в физике константы.
5. Решение в общем виде, проверьте на правильность единиц полученной (искомой) физической величины. Если возможно, исследуйте поведение решения в предельных случаях.
6. Подставьте в общее решение числовые значения заданных в задаче величин и табличные значения физических констант. Произведите вычисления, руководствуясь при необходимости правилами приближённых вычислений. Заметим, что современные вычислительные средства, позволяют эту задачу решить достаточно просто.
7. Оцените правдоподобность числового ответа, полученного в результате вычислений. Такая оценка может в ряде случаев обнаружить ошибочность полученного результата.

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Электростатикой называется раздел учения об электричестве, в котором изучается взаимодействие и свойства систем электрических зарядов, неподвижных относительно выбранной инерциальной системы отсчета.

Прямая задача электростатики заключается в отыскании электростатического поля, создаваемого заданным распределением зарядов (в общем виде не решается).

Обратная задача заключается в отыскании распределения зарядов, созданного электростатическим полем.

1. Электрический заряд и его свойства. Элементарный заряд

Изучение электростатического взаимодействия макроскопических тел приводит к выводу, что наэлектризованное тело можно охарактеризовать физической величиной – электрическим зарядом. Заряд – величина скалярная и выражается действительным числом. Будем обозначать q, Q – величина алгебраическая. В системе СИ за единицу заряда принята единица в 1Кл, $[q]$=1Кл.

Фундаментальным свойством электрического заряда является его существование в двух видах, которые принято называть положительным и отрицательным зарядом.

К числу важных свойств заряда можно отнести сохранение заряда (закон сохранения заряда), дискретность, инвариантность, аддитивность.

<u>Закон сохранения заряда</u>.

Алгебраическая сумма электрических зарядов в изолированной системе сохраняется.

$$q_1+q_2+q_3+\ldots+q_n=const$$

Под изолированной системой понимают идеализированную систему зарядов, не взаимодействующую с другими зарядами, не входящими в данную систему.

<u>Инвариантность заряда.</u>

Величина заряда во всех инерциальных системах отсчета одна и та же, не зависимо от того движется он или покоится.

$$q = q'$$

Последнее свойство в совокупности с принципом суперпозиции силы и поля позволяет решать ряд важных задач электростатики.

<u>Дискретность заряда.</u>

Пределом дробимости макроскопического заряда является элементарный (конечный, неделимый) заряд.

Величина элементарного заряда равна модулю заряда электрона $|e|=1.60217733(49)\cdot10^{-19}$ Кл.

<u>Аддитивность заряда.</u>

Полный электрический заряд произвольной системы зарядов равен сумме отдельных зарядов составляющих эту систему.

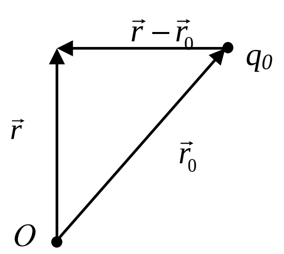
Задачи для решения

1.1 С какой относительной погрешностью надо измерять заряды порядка 10^{-9} Кл, чтобы обнаружить дискретную природу заряда.
1.2 Чему равен суммарный заряд моля электронов.
1.3 Какой заряд имел бы бы $1\,см^3$ железа, если бы удалить из него миллионную долю содержащихся в нём электронов.
1.4 Какой заряд приобрёл медный шар с радиусом $10\,см$, если бы удалось удалить все электроны проводимости? Плотность меди $8{,}9\,\frac{г}{см^3}$, атомный вес 64. Считать, что на каждый атом меди приходиться один электрон проводимости.
1.5 Вычислить ускорение, сообщаемое одним электроном другому, находящемуся от первого на расстоянии $1\,мм$.

2. Закон Кулона. Теорема Ирншоу

Одним из важнейших понятий, с которыми мы встречаемся в электростатике, является точечный заряд. Это идеальный объект. Точечных зарядов не существует, как и материальных точек.

Математическую модель точечного заряда можно представить следующим образом. Пусть в какой-либо точке пространства находится точечный заряд q_0 . Выберем произвольно начало отсчёта точку *O*. Укажем положение этого заряда с помощью радиус-вектора $\vec{r}_0$, а положение произвольной точки пространства с помощью радиус-вектора $\vec{r}$. Введём вектор, направленный из точки, где находиться заряд q_0 в произвольную точку пространства, который связан с ранее введёнными радиус-векторами простым соотношением $\vec{r}-\vec{r}_0$.



Тогда плотность заряда выражается соотношением

$$\rho(\vec{r}) = q_0 \cdot \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

где $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ - дельта-функция Дирака.

Свойства этой функции хорошо известны:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\begin{cases}\infty, & \vec{r}=\vec{r}_0\\ 0, & \vec{r}\neq\vec{r}_0\end{cases}$$

Тогда величину заряда определяет интеграл следующего вида

$$\int_V q_0\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)dV=q_0$$

Согласно этой модели, точечный заряд – это заряд, сосредоточенный в геометрической точке.

Определение точечного заряда.

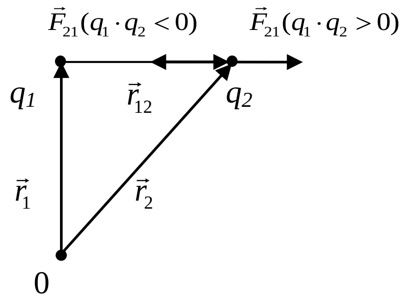
Точечный заряд – это геометрическая точка, которой мы приписываем заряд.

В 1784-1785 гг. Ш.Кулон установил фундаментальный закон взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов, который в последствии был назван его именем.

Закон Кулона.

Силы, с которыми два неподвижных точечных заряда действуют друг на друга, пропорциональны произведению этих зарядов и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними. Эти силы подчиняются третьему закону Ньютона.

Рассмотрим математическую формулировку этого закона. Пусть есть два неподвижных точечных заряда, q_1 и q_2. Выберем произвольно начало отсчёта. Зададим положение точечного заряда q_1 с помощью радиус-вектора $\vec{r}_1$, а заряда q_2 с помощью $\vec{r}_2$. Рассмотрим с какой силой заряд q_1, действует на заряд q_2. Договоримся относительно индексов у вектора силы: первый индекс – точка приложения силы, второй индекс указывает, со стороны какого заряда действует сила. Как известно разноимённые заряды притягиваются $F_{21}(q_1q_2<0)$, а одноимённые отталкиваются $F_{21}(q_1q_2>0)$.



Для записи закона в векторной форме введём вектор $\vec{r}_{12}$, направленный из точки, где находиться заряд q_1 в точку пространства, где располагается точечный заряд q_2, который связан с ранее введёнными радиус-векторами простым соотношением $\vec{r}_{12}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$. Составим из вектора $\vec{r}_{12}$, единичный вектор

$\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$. Тогда $\vec{F}_{21} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$. Последнее соотношение можно переписать в более удобном виде

$$\vec{F}_{21} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12}$$

Это и есть математическая формулировка закона Кулона в векторной форме. В случае, если заряды одноимённые $q_1 q_2 > 0$, то действие первого заряда на второй носит характер отталкивания. Если заряды разноимённые $q_1 q_2 < 0$, то характер притяжения.

Заметим, что силы, с которыми точечные заряды действуют друг на друга, подчиняются третьему закону Ньютона

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \ \left[\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{F}_{12}\right] = 0.$$

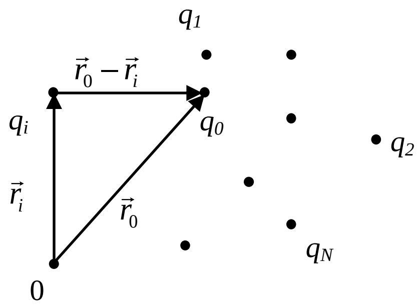
Коэффициент k в законе Кулона зависит от выбора системы единиц. В СИ

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}854187817 \cdot 10^{-12} \frac{Ф}{м}$ - электрическая постоянная.

Часто удобно пользоваться числовым значением коэффициента $k = 9 \cdot 10^9 \frac{м}{Ф}$.

Закон Кулона легко обобщить на систему неподвижных точечных зарядов, используя известный в механике принцип независимости действия сил. Путь имеется неподвижный точечный заряд q_0 в присутствии системы N неподвижных точечных зарядов q_1, q_2, q_3, ..., q_N. Определим, с какой силой будут действовать все заряды системы на заряд q_0. Для начала рассмотрим, с какой силой будет действовать на заряд q_0 произвольный точечный заряд системы q_i. Выберем произвольно начало отсчёта, сделаем необходимые построения и введём вектор $\vec{r}_0 - \vec{r}_i$, направленный от заряда q_i к заряду q_0.



Сила, с которой произвольный точечный заряд q_i действует на заряд q_0 согласно закону Кулона, можно представить как

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_0 q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_i).$$

Тогда результирующую силу, с которой на точечный разряд q_0 действуют все заряды, можно подсчитать, как векторную сумму

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_0 q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_i).$$

Последнее выражение представляет собой принцип независимости действия силы в электростатике.

Для механического равновесия системы точечных электрических зарядов необходимо и достаточно, чтобы сила, действующая, на каждый заряд системы со стороны всех других, обращалась в нуль. Устойчива ли система в этом случае? На этот вопрос ответ дает теорема Ирншоу.

Теорема Ирншоу.

Всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных зарядов неустойчива, если на них кроме кулоновских сил никакие другие силы не действуют.

Задачи для решения

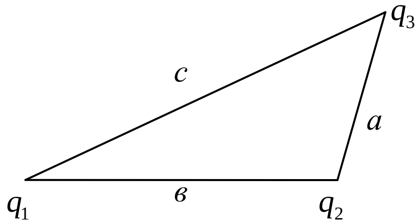
2.1 Чтобы составить представление о величине заряда в $1\,Кл$, вычислите силу, с которой взаимодействовали бы два точечных заряда величиной в $1\,Кл$ каждый, находящихся на расстоянии $1\,м$ друг от друга.

2.2 Аналогично предыдущей задачи заряд распределён по поверхности двух шаров. Показать, что взаимодействие описывается формулой тождественной взаимодействию точечных зарядов, расположенных в центре соответствующих шаров.

2.3 Вычислить отношение силы электрического отталкивания двух протонов к силе их гравитационного притяжения. Сделать тот же расчёт для электронов. При расчёте принять, что $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}\ кг$, $m_e = 9,31 \cdot 10^{-31}\ кг$, $e = -1,6 \cdot 10^{-19}\ Кл$.

2.4 Два точечных заряда $1,1\,нКл$ каждый, находятся на расстоянии $17,0\,см$. С какой силой и в каком направлении они действуют на единичный положительный заряд, находящийся на таком же расстоянии от каждого из них?

2.5 Одноимённые заряды $0,2\,мКл$, $0,5\,мКл$ и $0,4\,мКл$ расположены в вершинах треугольника со сторонами $4\,см$, $5\,см$ и $7\,см$. Определить модуль и направление силы, действующей на третий заряд.



2.6 Два одинаковых шарика массой $20\,мг$ каждый подвешены в воздухе на невесомых нерастяжимых проводящих нитях длиной $0,2\,м$, закреплённых в одной точке подвеса. Один из шариков отвели в сторону и сообщили ему заряд, затем отпустили. После соприкосновения с другим шариком они разошлись так, что нити образовали угол в $60°$. Определить модуль заряда сообщённого первому шарику.

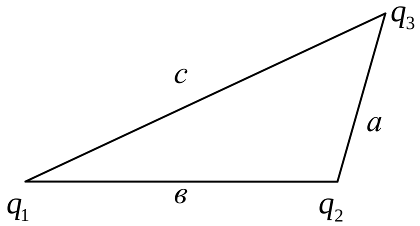
2.7 В вершинах квадрата находятся одинаковые по величине одноимённые заряды. Определить величину заряда, который надо поместить в центре квадрата, чтобы система находилась в равновесии. Будет ли это равновесие устойчивым?

2.8 Два одинаковых проводящих шарика подвешены на нитях одинаковой длины в $1\,м$. Нити закреплены в одной точке. После сообщения шарикам заряда $4\cdot10^{-7}\,Кл$ нити разошлись на угол $60°$. Определить силу тяжести, действующую на каждый шарик. Какова плотность материала шарика, если при погружении в керосин угол расхождения нитей стал $54°$.

2.9 Одинаковые (по величине и по знаку) точечные заряды помещены в вершинах правильного 1) треугольника, 2) четырёхугольника, 3) шестиугольника. Какой заряд противоположного знака надо поместить в центре системы, чтобы она находилась в равновесии?

Примеры решения задач

2.5 Одноимённые заряды $0{,}2\,мКл$, $0{,}5\,мКл$ и $0{,}4\,мКл$ расположены в вершинах треугольника со сторонами $4\,см$, $5\,см$ и $7\,см$. Определить модуль и направление силы, действующей на третий заряд.



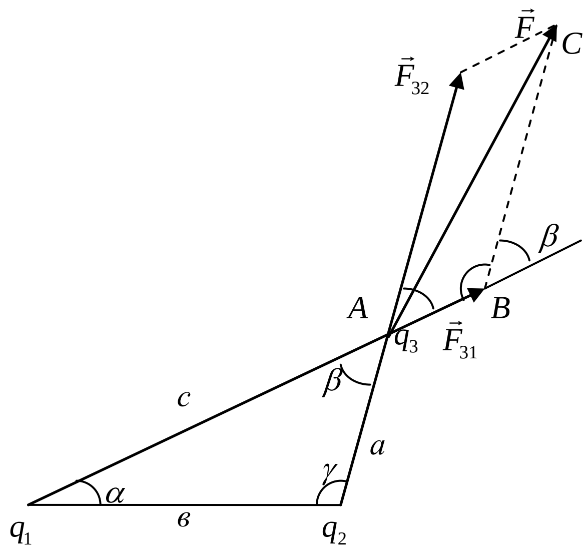
Решение.

Заметим, что задачу можно решить с помощью разных подходов. Наиболее доступный и надеемся хорошо известный из школьного курса физики, так называемый «координатный способ» решения, когда от общего уравнения в векторной форме при выбранной системе отсчёта переходят к уравнениям в проекциях на заданные оси, приводить не будем. Остановимся на двух других. Общее условное название такого подхода к решению - «векторный способ». Однако в первом случае используется теорема косинусов, а во втором свойство скалярного умножения векторов. После такого короткого замечания приступим к решению.

1) Использование теоремы косинусов.

Найдём силу $\vec{F}$, действующую со стороны зарядов q_1 и q_2 на третий заряд q_3. Эта сила, используя принцип суперпозиции силы, определяется выражением $\vec{F}=\vec{F}_{31}+\vec{F}_{32}$. Укажем силы $\vec{F}_{31}$ и $\vec{F}_{32}$ на рисунке. Для чего, чтобы обеспечить соразмерность этих векторов, оценим их модули $F_{31}=k\cdot\frac{|q_1|\cdot|q_3|}{c^2}$, $F_{32}=k\cdot\frac{|q_2|\cdot|q_3|}{a^2}$.

Элементарный расчёт показывает, что длина вектора $\vec{F}_{31}$ примерно в восемь раз меньше длины $\vec{F}_{32}$. Затем, используя любое из правил, сложения векторов, найдём их сумму $\vec{F}$.



Полученный векторный треугольник ΔABC можно рассматривать как произвольный треугольник со сторонами, длины которых равны соответственно F, F_{31}, F_{32}. Для отыскания длины F неизвестной стороны этого треугольника воспользуемся теоремой косинусов

$$F^2 = F_{31}^2 + F_{32}^2 - 2 \cdot F_{31} \cdot F_{31} \cdot \cos(\pi - \beta)$$

Учтём, что в последнем выражении $\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$. Для нахождения этого косинуса, ещё раз применим теорему косинусов, только для треугольника, в вершинах которого расположены заряды

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

Следовательно $\cos\beta = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$.

Тогда выражение для модуля силы действующей на заряд запишется как

$$F = \sqrt{F_{31}^2 + F_{32}^2 + 2 \cdot F_{31} \cdot F_{31} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}} = \sqrt{F_{31}^2 + F_{32}^2 + F_{31} \cdot F_{31} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{a \cdot c}}$$

С учётом выражений для модулей сил, действующих на выделенный заряд, и общих множителей, окончательно получим

$$F = k \cdot |q_3| \cdot \sqrt{\frac{q_1^2}{c^4} + \frac{q_2^2}{a^4} + \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{a^3 \cdot c^3} \cdot (c^2 + a^2 - b^2)}$$

$$F \approx 9 \cdot 10^9 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{(0,2 \cdot 10^{-3})^2}{(0,07)^4} + \frac{(0,5 \cdot 10^{-3})^2}{(0,04)^4} + \frac{0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{(0,04)^3 \cdot (0,07)^3} \cdot ((0,07)^2 + (0,04)^2 - (0,05)^2)} \approx$$

$$\approx 1,24 \cdot 10^6 \ H$$

Направление результирующей силы можно показать на рисунке или задать углом (направляющим косинусом) по отношению к какой-либо известной силе $\vec{F}_{31}$ или $\vec{F}_{32}$ используя ту же самую теорему косинусов для треугольника ΔABC, но с уже известными всеми сторонами. Например, по отношению к силе $\vec{F}_{31}$, решение будет выглядеть следующим образом

$$F_{32}^2 = F + F_{31}^2 - 2 \cdot F \cdot F_{31} \cdot \cos\varphi \qquad \cos\varphi = \frac{F + F_{31}^2 - F_{32}^2}{2 \cdot F \cdot F_{31}}$$

$$\varphi = \pm \arccos\left(\frac{F + F_{31}^2 - F_{32}^2}{2 \cdot F \cdot F_{31}}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$$

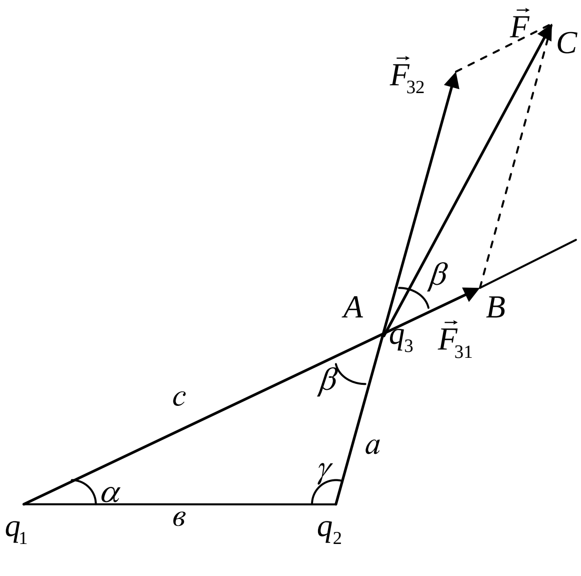
2)Использование свойства скалярного умножения векторов.

Из векторного исчисления известно, что скалярный квадрат вектора $\vec{a}$ равен квадрату его модуля

$$(\vec{a})^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = a^2$$

Откуда получаем $a^2 = \sqrt{(\vec{a})^2}$. Последнее означает, что модуль вектора равен квадратному корню из скалярного квадрата этого же вектора. Этим свойством и воспользуемся для решения задачи.

Как и в предыдущем случае, сила $\vec{F}$, действующая со стороны зарядов q_1 и q_2 на третий заряд q_3, определяется векторным выражением $\vec{F} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$.



Из полученного векторного треугольника ΔABC, найдём скалярный квадрат вектора $\vec{F}$, представляющего его диагональ

$$(\vec{F})^2 = ((\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}), (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32})) = (\vec{F}_{31})^2 + (\vec{F}_{31}, \vec{F}_{32}) + (\vec{F}_{32}, \vec{F}_{31}) + (\vec{F}_{32})^2 =$$

$$= (\vec{F}_{31})^2 + (\vec{F}_{32})^2 + 2 \cdot (\vec{F}_{31}, \vec{F}_{32}) = F_{31}{}^2 + F_{32}{}^2 + 2 \cdot F_{31} \cdot F_{32} \cdot \cos\beta$$

β - угол между векторами $\vec{F}_{31}$ и $\vec{F}_{32}$. Тогда модуль этого вектора определяется как $F^2 = \sqrt{(\vec{F})^2}$ и следовательно

$$F = \sqrt{F_{31}^2 + F_{32}^2 + 2 \cdot F_{31} \cdot F_{31} \cdot \cos\beta}$$

Дальнейшее решение задачи аналогично приведённому выше решению, при использовании теоремы косинусов.

3. Применение закона Кулона к зарядам произвольной формы

Закон Кулона сформулирован для идеальных объектов – точечных зарядов, однако часто, нам приходится встречаться с зарядами, распределенными произвольным образом. Принцип независимости действия силы в электростатике и свойство, выражающее аддитивность заряда, позволяют вычислить силу взаимодействия между произвольными непрерывно распределенными макроскопическими зарядами. Для этого мысленно разбивают каждый из зарядов на отдельные элементы и заменяют их точечными неподвижными зарядами, общий заряд которых равен первоначальному макроскопическому заряду. Процесс замены заключается в стягивании каждого элемента к произвольной точке внутри этого же элемента. Заряд элемента при этом сохраняется. Таким образом, мы переходим к промежуточной модели – системе точечных зарядов. Применяя закон Кулона к каждым попарно взятым точечным зарядам, и принцип суперпозиции сил, описывают взаимодействие полученной модели. Увеличивая число элементов, будем получать все более точную модель взаимодействия исходных зарядов. В конечном итоге, совершая предельный переход, при котором число разбиений в пределе стремится к бесконечности, а размеры каждого из элементов к нулю, опишем взаимодействие произвольных зарядов. Этот предел позволяет вернуться к произвольно распределенным макроскопическим зарядам. Математически это выражается в замене предельных сумм соответствующими интегралами по объему, поверхности или контуру. Важно помнить, что при переходе к промежуточной модели – системе точечных зарядов, они должны оставаться неподвижными, относительно первоначально выбранной системы отсчёта с тем, чтобы можно было применить закон Кулона.

Задачи для решения

3.1 С какой силой действует длинная проволока с линейной плотностью заряда $10^{-8}\,\dfrac{Кл}{м}$ на точечный заряд $2\cdot 10^{-8}\,Кл$, находящийся на расстоянии $3\,см$ от проволоки на перпендикуляре, проведённом из её середины?

3.2 Тонкий стержень длиной $30\,см$ равномерно заряжен зарядом с линейной плотностью $-1\,\dfrac{мкКл}{м}$. На расстоянии $20\,см$ от стержня находится заряд $10\,нКл$, равноудалённый от его концов. Определить силу, с которой стержень действует на точечный заряд.

3.3 По тонкому проволочному кольцу радиусом $6\,см$ равномерно распределён заряд $10\,нКл$. Определите силу, действующую на точечный заряд $3\,нКл$, находящийся на расстоянии $5\,см$ от центра кольца на прямой, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через её центр.

3.4 Горизонтально расположенное кольцо радиусом $20\,см$ равномерно заряжено зарядом линейной плотностью $0{,}1\,\dfrac{мкКл}{см}$. Из центра кольца вертикально вниз падает тело массой $5\,г$, несущее заряд $-10\,нКл$. Определить ускорение тела в тот момент, когда оно будет находиться на расстоянии $30\,см$ от плоскости кольца. Рассмотреть задачу так же и для случая положительного заряда в $10\,нКл$.

3.5 По телу объёмом V распределён заряд q с плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$. По другому телу объёмом V' распределён другой заряд q' с плотностью $\rho' = \rho'(x', y', z')$. Написать выражение для силы, с которой заряд q действует на заряд q'.

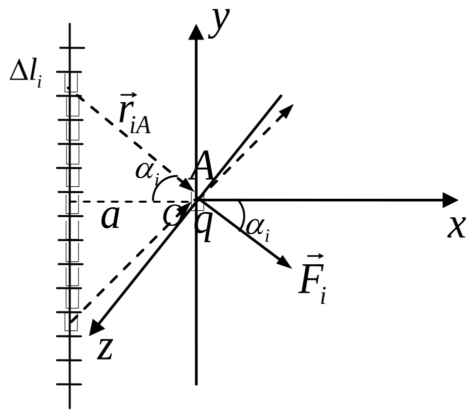
Примеры решения задач

3.1 С какой силой действует длинная проволока с линейной плотностью заряда $10^{-8}\,\dfrac{Кл}{м}$ на точечный заряд $2 \cdot 10^{-8}\,Кл$, находящийся на расстоянии $3\,см$ от проволоки на перпендикуляре, проведённом из её середины?

Решение.

По условию задачи рассматривается взаимодействие непрерывно распределённого заряда и точечного заряда. Основная трудность, с которой мы сталкиваемся, прежде чем приступить к её решению заключается в том, что в нашем распоряжении имеется только закон взаимодействия точечных зарядов. Использовать его непосредственно не представляется возможным. Покажем, как применять закон взаимодействия точечных зарядов к зарядам распределённым непрерывно.

Известно, что линейная плотность заряда определяется соотношением $\tau = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta l}$, а закон взаимодействия двух точечных зарядов можно представить в виде $\vec{F}_{21} = k \cdot \dfrac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12}$. Перейдём к промежуточной модели непрерывно распределённого по проволоке заряда – системе точечных зарядов. Для чего, мысленно, разбиваем проволоку на произвольное число N элементов, малой длины Δl_i и стягиваем каждый из них к точке, находящейся внутри соответствующего элемента. При этом, каждый из полученных зарядов в точке Δq_i равен заряду элемента $\Delta q_i = \tau \cdot \Delta l_i$. Теперь рассмотрим, как промежуточная модель – система точечных зарядов, действует на точечный заряд q. Сила с которой произвольный точечный заряд промежуточной модели Δq_i действует на точечный заряд q, может быть записана как $\vec{F}_i = k \cdot \dfrac{\Delta q_i q}{r_{iA}^3} \cdot \vec{r}_{iA}$, а её модуль $F_i = k \cdot \dfrac{|\Delta q_i| \cdot |q|}{r_{iA}^2}$. Выберем систему координат так, чтобы одна из её осей была параллельна проволоке. Начало отсчёта пусть совпадает с точечным зарядом q, действие на который со стороны заряженной проволоки необходимо найти по условию задачи.



Такой выбор системы отсчёта позволяет рассматривать решение задачи в плоскости XOY. Переходя от векторного уравнения к уравнениям в проекциях, получим

$$F_{ix} = F_i \cdot \cos\alpha_i , \quad F_{iy} = F_i \cdot \sin\alpha_i$$

Для промежуточной модели проекции суммарной силы, действующей со стороны всей системы точечных зарядов на заряд q, очевидно, определяются как

$$F_x = \sum_{i=1}^{N} F_{ix} , \; F_y = \sum_{i=1}^{N} F_{iy} = 0$$

Заметим, что последнее из приведённых выражений $F_y = 0$, справедливо в силу симметричного распределения зарядов на проволоке относительно выбранного начала отсчёта и для случая бесконечной её длины. В нашем случае предполагается, что расстояние a от проволоки до заряда q намного меньше длины самой проволоки l, то есть $a \ll l$. Однако необходимо помнить, что мы обязаны, вернутся к непрерывному распределению заряда на проволоке и для оставшейся проекции силы это определяется выражением

$$F_x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} F_{ix} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \cos\alpha_i ,$$

где F_i записывается уже с учётом выбранной системы отсчёта $F_i = k \cdot \dfrac{\tau \cdot \Delta y_i \cdot q}{\left(y_i^{\,2} + a^2\right)}$.

Тогда, с учётом последнего и возможностью выразить косинус i-го угла через расстояние a и положение i-го заряда $\cos\alpha_i = \dfrac{a}{\sqrt{y_i^{\,2} + a^2}}$ получим

$$F_x = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} k \cdot \frac{\tau \cdot \Delta y_i \cdot q}{\left(y_i^{\,2} + a^2\right)} \cdot \frac{a}{\sqrt{y_i^{\,2} + a^2}} = k \cdot q \cdot \tau \cdot a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\left(y^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

Знак проекции последнего выражения определяет направление силы действующей на рассматриваемый заряд q со стороны заряженной проволоки относительно выбранной системы отсчёта, а модуль этой проекции (поскольку $F_y = 0$) величину силы $F = |F_x|$.

Решение интеграла проводим с помощью тригонометрической подстановки $y = a \cdot tg\alpha,\ dy = \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot d\alpha$. Необходимо помнить, что в этом случае изменяются пределы интегрирования: $y = -\infty,\ \alpha = -\frac{\pi}{2};\ y = +\infty,\ \alpha = +\frac{\pi}{2}$. С учётом последнего замечания, решение будет выглядеть следующим образом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\left(y^2 + a^2\right)^{3/2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{a}{\cos^2\alpha \cdot \left(a^2 \cdot tg^2\alpha + a^2\right)^{3/2}} \cdot d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{a}{\cos^2\alpha \cdot a^3\left(1 + tg^2\alpha\right)^{3/2}} \cdot d\alpha =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha \cdot a^2} \cdot d\alpha = \frac{1}{a^2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{a^2} \cdot \sin\alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{a^2} \cdot \left(1 - (-1)\right) = \frac{2}{a^2}$$

Заметим, что при упрощении выражения использовалось известное тригонометрическое соотношение $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. Тогда

$$F_x = k \cdot q \cdot \tau \cdot a \cdot \frac{2}{a^2} = 2 \cdot k \cdot \tau \cdot \frac{q}{a} \quad \text{и} \quad F = \left| 2 \cdot k \cdot \tau \cdot \frac{q}{a} \right|.$$

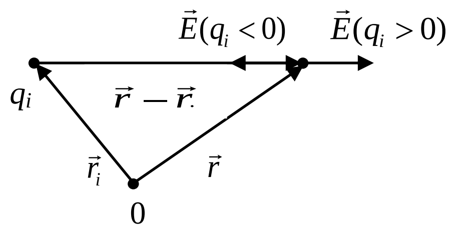
Подставляя данные задачи, получим $F_x = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-8}}{0,03} = 6 \cdot 10^{-5}\ H$

Поскольку $F_x > 0$, то сила, с которой заряженная проволока действует на заряд q, совпадает с положительным направлением оси OX. Это означает, что действие проволоки на заряд носит характер отталкивания заряда. Абсолютное значение этой силы равно $F = 6 \cdot 10^{-5}\ H$.

4. Напряжённость электростатического поля

Векторной характеристикой электрического поля служит специальная физическая величина – напряженность электрического поля $\vec{E}$.

Пусть в произвольной точке пространства находится неподвижный точечный заряд q_i. Выберем начало отсчёта точку O. Зададим положение заряда с помощью радиус-вектора $\vec{r}_i$. Положение произвольной точки пространства определим радиус вектором $\vec{r}$. Введём вектор $(\vec{r} - \vec{r}_i)$, направленный от заряда в рассматриваемую точку пространства.



Определим электрическое поле $\vec{E}(x,y,z)$ в произвольной точке пространства, созданное неподвижным точечным зарядом q_i как

$$\vec{E}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

В этом случае говорят о точечном заряде как источнике поля. Заметим, что модуль вектора напряжённости поля, обратно пропорционален квадрату расстояния до рассматриваемой точки, а направление вектора зависит от знака заряда.

Если в данную точку пространства, в которой определен вектор $\vec{E}$, поместить точечный заряд q, то на него будет действовать сила пропорциональная величине этого заряда

$$\vec{F}=q\cdot\vec{E}$$

К числу важнейших свойств, которыми обладает электрическое поле, относится его проницаемость. Это свойство означает, что в одной и той же области пространства могут существовать одновременно несколько полей. Как следствие этого свойства, является утверждение о принципе суперпозиции (наложения) электрических полей.

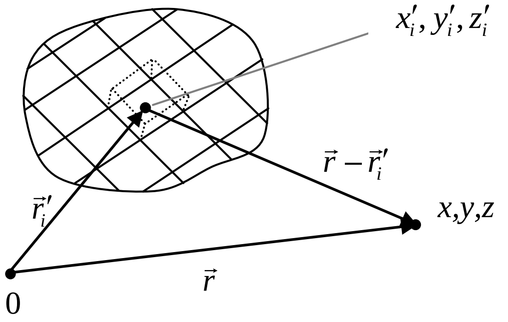
Принцип суперпозиции электростатического поля.

Если $\vec{E}_1,\vec{E}_2,...,\vec{E}_N$ - напряженности поля, создаваемые неподвижными точечными зарядами в какой-либо точке пространства, то результирующая напряженность поля в этой же точке $\vec{E}$ равна векторной сумме полей, создаваемых каждым из точечных зарядов в отдельности

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+...+\vec{E}_N=\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i$$

Выражение для напряжённости поля точечного заряда и принцип суперпозиции электростатического поля являются исходным для расчета электрического поля, созданного в произвольной точке пространства непрерывным распределением заряда. В этом случае, переходя к промежуточной модели – системе точечных зарядов – находят поле, созданное этой моделью. Увеличивая число элементов, поле в данной точке пространства определяют все более точно. Совершая предельный переход при стремлении числа элементов к бесконечности, получаем поле, созданное непрерывно распределенным зарядом. Математически выше представленный алгоритм выглядит следующим образом.

Договоримся, присвоить области занятой зарядом, штрихованные координаты, а области соответствующей пространству, где определено поле не штрихованные координаты, чтобы отличать одну область пространства от другой. Пусть в некоторой области пространства V' распределение заряда задано его объемной плотностью (возможно, поверхностной или линейной) $\rho(x',y',z')$.



Разобьём область, где сосредоточен заряд на N элементов. Рассмотрим один из них. Выделим внутри этого элементарного объёма $\Delta V_i'$ произвольную точку с координатами x_i', y_i', z_i', положение которой задаётся радиус-вектором $\vec{r}_i'$. Заряд, сосредоточенный в этом элементе можно представить как $\Delta q_i = \rho(x_i', y_i', z_i') \cdot \underbrace{\Delta x_i' \cdot \Delta y_i' \cdot \Delta z_i'}_{\Delta V_i'}$. Стянем этот объём к выбранной точке. Замети, что при этом величина заряда не изменилась, а сам заряд можно считать точечным. Выберем другую произвольную точку пространства и зададим её положение радиус-вектором $\vec{r}$. Введём вектор $\vec{r} - \vec{r}_i'$. Тогда поле в заданной точке с координатами x, y, z, создаваемое зарядом Δq_i, будем определяться выражением

$$\vec{E}_i(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho(x_i' y_i', z_i') \cdot \Delta x_i' \cdot \Delta y_i' \cdot \Delta z_i'}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i'\right|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i')$$

Суммируя поля отдельных зарядов элементов и переходя к приделу, получим поле в точке с координатами x, y, z, создаваемое непрерывно распределенным зарядом

$$\vec{E}(x, y, z) = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta V_i' \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(x, y, z)$$

С учётом выражения для поля созданного произвольным зарядом Δq_i, последнее выражение перепишется

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int\limits_{V'} \frac{\rho(x', y', z') \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz'$$

Это выражение определяет поле в произвольной точке пространства, созданное непрерывно распределенным зарядом по объему. Совершенно очевидно, что аналогичное уравнение можно записать и для заряда распределённого по поверхности или заряда заданного с помощью линейной плотности заряда.

Таким образом, зная распределение зарядов, мы можем решить задачу о нахождении напряженности электрического поля в любой точке пространства, то есть решить прямую задачу электростатики.

Задачи для решения

4.1 Точечные заряды $20\,нКл$ и $-10\,нКл$ находятся в воздухе на расстоянии $10\,см$ друг от друга. Определить напряжённость поля в точке, удалённой на расстояние $8\,см$ от первого и $7\,см$ от второго.

4.2 Заряд 20 нКл равномерно распределен по тонкой нити длиной 1м. Определить напряженность поля в точке, находящейся на расстоянии 10 см от нити и равноудаленной от его концов.

4.3 Тонкое кольцо радиусом R равномерно заряжено зарядом линейной плотностью τ. Определить напряженность поля в вакууме: 1) на расстоянии h от центра кольца на оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через центр; 2) в центре кольца. На каком расстоянии от центра кольца на оси напряженность поля будет максимальной? минимальной?

4.4 Полусфера равномерно заряжена, поверхностная плотность заряда равна σ. Найдите напряжённость поля в центре полусферы.

4.5 Решить задачу в общем виде о поле двух одноимённых зарядов (диполь), находящихся в вакууме на конечном расстоянии, с нахождением максимума поля, построением силовых линий и графика.

Примеры решения задач

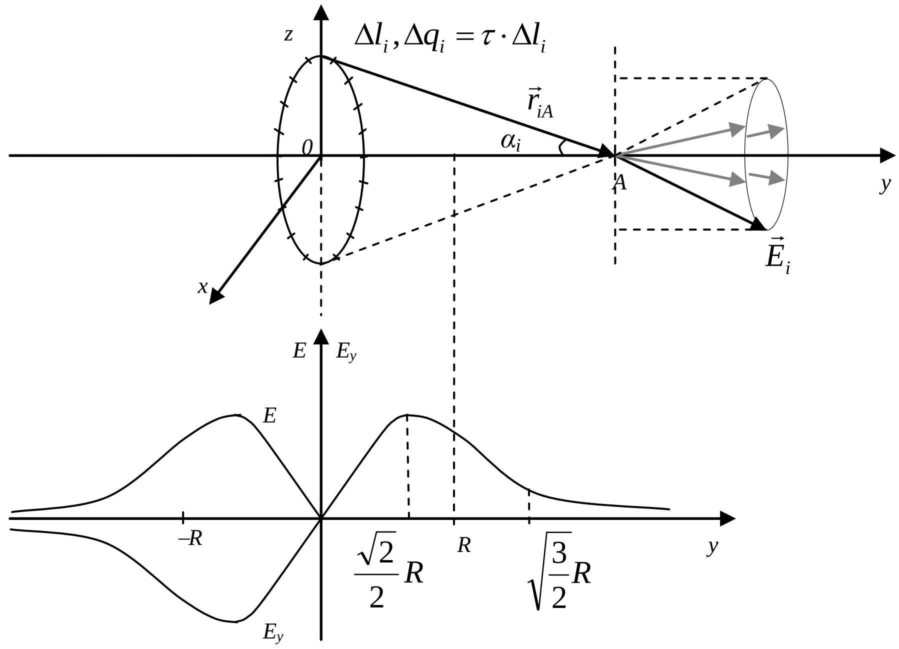
4.3 Тонкое кольцо радиусом R равномерно заряжено зарядом линейной плотностью τ. Определить напряженность поля в вакууме: 1) на расстоянии h от центра кольца на оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через центр; 2) в центре кольца. На каком расстоянии от центра кольца на оси напряженность поля будет максимальной? минимальной?

Решение.

По определению $\tau = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta l}$, $\vec{E}(x,y,z) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)$.

Ответим на вопрос, как применить закон, определяющий поле точечного заряда на произвольном расстоянии, для решения задачи о поле непрерывно распределенного заряда. Для чего мысленно разбиваем кольцо на N элементов и стягиваем к точке внутри каждого элемента. При этом полученный заряд Δq_i в точке, равен заряду элемента $\Delta q_i = \tau \cdot \Delta l_i$. Таким образом, переходим к промежуточной модели - системе точечных зарядов, каждый из которых создаёт в рассматриваемой точке поле напряжённостью $\vec{E}_{iA} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{\Delta q_i}{r_{iA}^3} \cdot \vec{r}_{iA}$, и модулем $E_{iA} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{|\tau| \cdot \Delta l_i}{r_{iA}^2}$. Необходимо помнить, что в дальнейшем нужно вернуться к сплошному распределению заряда по кольцу.

Выберем систему координат так, чтобы одна из осей совпадала с осью координат, а две другие лежали в плоскости кольца или образовывали плоскость, совпадающую с плоскостью кольца, а начало координат совпадало с центром кольца.



При таком выборе системы координат в общем случае будут существовать все три проекции вектора $\vec{E}_{iA}$ на оси OX, OY, OZ. Однако в силу симметрии, не равной нулю окажется только проекция на ось OY. Векторы *i*-ых элементов будут образовывать своеобразный конус с вершиной в точке *A*, а длина образующей этого конуса будет равна абсолютной величине (модулю) напряжённости поля E_{iA}.

$$E_{Ax} = 0, \quad E_{Az} = 0, \quad E_{Ay} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} E_{iA} \cdot \cos\alpha_i .$$

Заметим, что $\cos\alpha_i = \dfrac{y_i}{\sqrt{R^2 + y^2}}$.

$$E_{Ay} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta l \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|\tau| \cdot \Delta l_i}{R^2 + y_i^2} \cdot \frac{y_i}{\sqrt{R^2 + y_i^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|\tau| \cdot y}{(R^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^{2\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{y}{(R^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot |\tau| \cdot 2\pi R,$$

$E_{Ay} = \dfrac{|\tau| \cdot R}{2\varepsilon_0} \cdot \dfrac{y}{(R^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\quad E_A = |E_{Ay}|$ - здесь указан и модуль и направление $\vec{E}_A$.

Анализируя решение задачи в общем виде, отвечаем на вопрос, сформулированный в условии задачи

y=h, $E = \dfrac{|\tau| \cdot R}{2\varepsilon_0} \cdot \dfrac{h}{(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$,

y=0, E=0 – поле в центре кольца действительно равно нулю.

Для ответа на вопрос о *min* и *max* поля необходимо E_{Ay} исследовать на экстремум на всей оси OY в интервале $]-\infty;+\infty[$. Это чисто математическая задача.

$(E_{Ay})' = 0$;

$$\frac{|\tau|\cdot R}{2\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - y\cdot\frac{3}{2}\cdot(R^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y}{(R^2+y^2)^3}\right] = \frac{|\tau|\cdot R}{2\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - 3y^2\cdot(R^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(R^2+y^2)^3}\right] = 0.$$

Поступим проще

$$(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - 3y^2(R^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = 0;$$

$$(R^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[(R^2+y^2) - 3y^2\right] = 0;$$

$$\sqrt{R^2+y^2} = 0;\quad (R^2+y^2) - 3y^2 = 0.$$

Первое уравнение дает мнимые корни.

Второе $R^2 - 2y^2 = 0$, $y^2 = \frac{R_2}{2}$, $y = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}R$ (≈0,7R).

Построение графика для абсолютной величины (можно для проекции) проводим с обсуждением. Используем данные решения, полученные ранее, а именно *y=0, E=0*.

Ответ на вопрос о поле на бесконечности $\pm\infty$ проводим с помощью правила Лопиталя, так как при подстановке ∞ в уравнение для *E* получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{y\to\pm\infty}\frac{y}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{y\to\pm\infty}\frac{(y)'}{\left[(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]'} = \lim_{y\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\left(R^2+y^2\right)\cdot 2y} = 0.$$

Внимательный читатель заметит, что в точке *y=0* и других точках функция имеет точки перегиба, что легко определить с помощью второй производной функции.

$$E'_{Ay} = \frac{|\tau|\cdot R}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{(R^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[(R^2+y^2)-3y^2\right]}{(R^2+y^2)^3} = \frac{|\tau|\cdot R}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\left[(R^2+y^2)-3y^2\right]}{(R^2+y^2)^3\cdot(R^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{|\tau|\cdot R}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{((R^2+y^2)-3y^2)}{(R^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \frac{|\tau|\cdot R}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{(R^2-2y^2)}{(R^2+y^2)^{\frac{5}{2}}};$$

$$E''_{Ay} = \frac{|\tau|\cdot R}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{-4y\cdot(R^2+y_2)^{\frac{5}{2}} - (R^2-2y^2)\cdot\frac{5}{2}\cdot(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 2y}{(R^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \frac{|\tau|\cdot R}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{-4y\cdot(R^2+y^2)^{\frac{5}{2}} - 5y\cdot(R^2-2y^2)\cdot(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(R^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$-4y\cdot(R^2+y^2)^{\frac{5}{2}} - 5y\cdot(R^2-2y^2)\cdot(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 0;$$

$$\left[-4y(R^2+y^2) - 5y\cdot(R^2-2y^{2)}\right]\cdot(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 0;$$

$y\cdot[-4\cdot(R^2+y^2)-5\cdot(R^2-2y^2)]=0$; *y=0* – потерянная точка перегиба.
$-4\cdot(R^2+y^2)-5\cdot(R^2-2y^2)=0$;
$-4R^2-4y^2-5R^2+10y^2=0$;
$-9R^2+6y^2=0$;
$6y^2=9R^2$;
$y^2=\frac{9}{6}R^2=\frac{3}{2}R^2$; $y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot R$; $y\approx\pm1{,}25R$ - точка перегиба.

Изобразим полученные результаты с помощью графика.

5. Потенциал электростатического поля

Из свойства консервативности электростатических сил следует, что заряд q', находящийся в электростатическом поле другого точечного заряда q, обладает потенциальной энергией

$$W_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q'q}{r}+const$$

Видно, что потенциальная энергия W_p заряда q' зависит от величины самого заряда, и поэтому не может быть однозначной характеристикой поля созданного зарядом q в точке, где находится заряд q'. Для характеристики этого поля вводится понятие потенциала электростатического поля.

Потенциал электростатического поля.

Величина, равная отношению потенциальной энергии точечного заряда к самому заряду, получила название потенциала электростатического поля в данной точке

$$\varphi=\frac{W_p}{q'}+const$$

Потенциал – величина скалярная и определяется с точностью до const, выбор которой произволен. Если φ задано во всех точках пространства рассматриваемой области, говорят о скалярном поле потенциала. Для потенциала выполняется принцип суперпозиции.

Принцип суперпозиции потенциала.

Потенциал поля, созданного системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности

$$\varphi=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i$$

Заряд q', находящийся в точке поля с потенциалом φ, обладает потенциальной энергией

$$W_p=q'\cdot\varphi+const$$

Поскольку работа при перемещении заряда q' из произвольной точки 1 в точку 2 может быть определена, как изменение его потенциальной энергии с обратным знаком

$$A_{1,2} = -\Delta W_p = W_{p1} - W_{p2},$$

то эта же работа может быть представлена и через потенциалы соответствующих точек пространства, где задано поле

$$A_{1,2} = q' \cdot (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Как видно из последнего выражения работа, совершаемая при перемещении заряда в электростатическом поле, равна произведению заряда q' на разность потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$. С другой стороны, эту же работу можно представить, как интеграл

$$A_{1,2} = q' \cdot \int\limits_{(1)}^{(2)} (\vec{E}, d\vec{r}).$$

Тогда из сравнения видно

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{(1)}^{(2)} (\vec{E}, d\vec{r}).$$

Это выражение, по существу, представляет собой общее определение разности потенциалов электростатического поля, и как следствие, способ нахождения этой разности. Кроме того, оно устанавливает связь между векторной и скалярной характеристиками электростатического поля.

Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом определяется соотношением

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \vec{k} \right)$$

Правая часть выражения, стоящая в скобках, называется градиентом потенциала и обозначается как $grad\ \varphi$. Тогда, с учётом обозначения

$$\vec{E} = -grad\ \varphi$$

Как видно это векторная величина. Из математического анализа хорошо известно, что градиент скалярной величины, это вектор, направление которого совпадает с направлением максимального возрастания функции этой скалярной величины.

С учётом последнего замечания, делаем вывод о том, что вектор $\vec{E}$ направлен в сторону, противоположную максимальному возрастанию потенциала. Градиент потенциала можно записать, ёще короче, с использованием оператора Гамильтона $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$

$$grad\ \varphi = \nabla \varphi$$

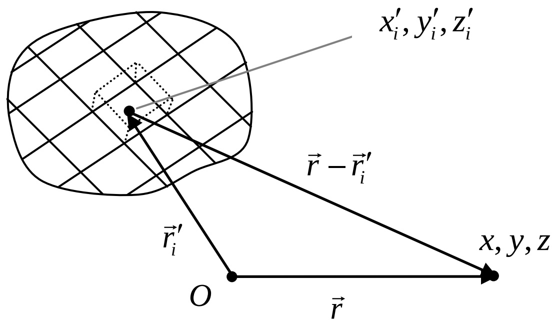
В правой части последнего выражения действие оператора Гамильтона, по общему правилу, распространяется на величину стоящую справа от него.

Прямым расчётом можно показать , что потенциал поля точечного заряда в произвольной точке пространства относительно бесконечно удаленной точки определяется выражением

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + const$$

Заметим, что потенциал убывает обратно пропорционально расстоянию до рассматриваемой точки.

Рассчитаем потенциал поля непрерывно распределенного заряда. Пусть имеется произвольная область пространства V', в которой заряд распределен по объему с объёмной плотностью $\rho(x', y', z')$.



Разобьём рассматриваемую область на N элементов. Рассмотрим один из них $\Delta V_i' = \Delta x_i' \cdot \Delta y_i' \cdot \Delta z_i'$. Выделим внутри этого элементарного объёма произвольную точку с координатами x_i', y_i', z_i', положение которой задаётся радиус-вектором $\vec{r}_i'$. Заряд, сосредоточенный в этом элементе очевидно равен произведению плотности заряда в окрестности выделенной точки на объём этого элемента $\Delta q_i = \rho(x_i', y_i', z_i') \cdot \Delta x_i' \cdot \Delta y_i' \cdot \Delta z_i'$. Стянем этот элементарный объём к выбранной точке. Заметим, что при этом величина заряда не изменилась, а сам заряд можно считать точечным. Выберем другую произвольную точку пространства с координатами x, y, z и зададим её положение радиус-вектором $\vec{r}$. Введём вектор $\vec{r} - \vec{r}_i'$. Тогда потенциал поля, создаваемый зарядом Δq_i в этой точке пространства, будет определяться выражением

$$\varphi_i(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho(x_i', y_i', z_i') \cdot \Delta x_i' \cdot \Delta y_i' \cdot \Delta z_i'}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|}$$

Поступаем аналогичным образом с каждым элементом. Далее воспользовавшись принципом суперпозиции потенциала и возвращаясь к непрерывному распределению заряда, получим

$$\varphi(x, y, z) = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta V_i' \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x, y, z)$$

Как известно, данный предел существует и он равен интегралу по объёму занятому зарядом

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz'$$

Это выражение окончательно определяет потенциал электростатического поля непрерывно распределённого по объёму заряда относительно бесконечности. Очевидно, аналогичные уравнения можно получить и для распределения зарядов заданного σ и τ.

Используя рассмотренные выше приёмы расчета потенциала можно рассчитать поля, созданные распределением любых зарядов. Поскольку электростатическое поле можно описать как с помощью векторной величины

$\vec{E}$, так и скалярной φ, в ряде задач удобнее вычислить сначала потенциал, а затем, воспользовавшись его связью с напряжённостью поля $\vec{E} = -grad\varphi$, перейти к его векторной характеристике $\vec{E}$. Вычисление φ обычно оказывается проще, поскольку потенциал величина скалярная.

Задачи для решения

5.1 По тонкому проволочному кольцу радиуса $60\,мм$ равномерно распределён заряд $20\,нКл$. Найдите потенциал и напряжённость поля как функцию расстояния от центра кольца на оси, и построить графики. Примечание: напряжённость поля вычислить, используя связь между напряжённостью поля и потенциалом.

5.2 Заряд $0.5\,нКл$ равномерно распределён на поверхности проводящей сферы радиусом $2.5\,см$. Найти потенциал электрического поля в центре, на поверхности сферы и на расстоянии $5\,см$ от центра. Построить график зависимости потенциала от расстояния до центра сферы.

5.3 Имеется бесконечная плоскость, заряженная однородно с плотностью σ. Ось OX перпендикулярна к плоскости; начало отсчёта OX находится в точке пересечения оси с плоскостью:

а) воспользовавшись теоремой Гаусса, найти выражение для E_x в точке с координатой x;

б) найти зависимость φ от x.

5.4 Шарик, имеющий заряд $1\,мкКл$, подвешен на невесомой изолирующей пружине жесткостью $9\,\frac{Н}{м}$. Из бесконечности медленно приближают другой шарик с таким же зарядом и помещают его в ту точку где первоначально находился шарик на пружине. Какую работу совершили при этом электростатические силы.

Примеры решения задач

5.1 По тонкому проволочному кольцу радиуса $60\,мм$ равномерно распределён заряд $20\,нКл$. Найдите потенциал и напряжённость поля как функцию расстояния от центра кольца на оси, и построить графики.

Примечание: напряжённость поля вычислить, используя связь между напряжённостью поля и потенциалом.

Решение.

По определению $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$.

Разбивая кольцо на N элементов, стягиваем каждый полученный элемент к точке внутри элемента. Получим промежуточную модель – систему точечных зарядов, каждый из которых определяется выражением $\Delta q_i = \tau \cdot \Delta l_i = \frac{Q}{2\pi R} \cdot \Delta l_i$. Значение потенциала, созданного каждым из зарядов в рассматриваемой точке определяется выражением $\varphi_{iA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\Delta q_i}{r_{iA}}$. Очевидно, потенциал в точке A такой системы, будет определяться суммой потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности (принцип суперпозиции потенциала). Для непрерывно распределенного заряда потенциал определяется как

$$\varphi_A = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \varphi_{iA}, \quad \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta li\to 0}} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\frac{Q}{2\pi R} \cdot \Delta l_i}{\sqrt{y^2 + R^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{2\pi R} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 + R^2}} \cdot \int_0^{2\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\sqrt{y^2 + R^2}}.$$

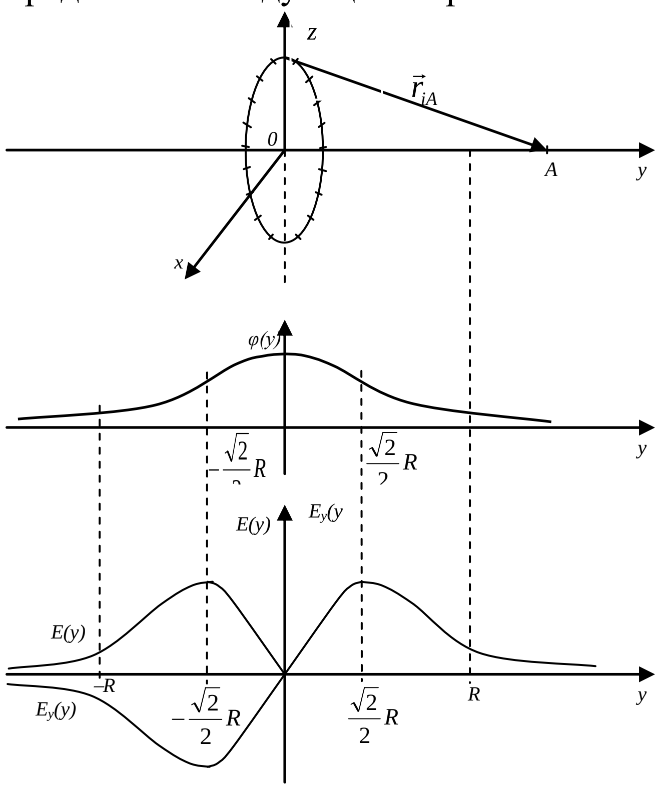
В общем виде, опуская индекс A выражение имеет вид $\varphi(y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\sqrt{y^2 + R^2}}$.

Так как $\vec{E} = -grad\varphi$, а в силу симметрии, существует только проекция E_y. Поскольку
$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \vec{k}\right)$, и вектор напряжённости может быть представлен как $\vec{E} = E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j} + E_z \cdot \vec{k}$, то $E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$. Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + R^2}}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(y^2 + R^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(y^2 + R^2\right) \cdot 2y\right),$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot y}{(y^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Проанализируем процедуру построения графиков в общем виде. Если ввести систему координат, то искомые величины $\varphi(y), E_y(y)$ и $E(y)$ можно представить следующим образом



Функция E_y подробно уже исследована в задаче 4.3, предыдущего раздела. Этим решением можно воспользоваться. Уделим больше внимания функции определяющей зависимость потенциала от расстояния $\varphi(y)$

$$\varphi(y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\sqrt{y^2 + R^2}}.$$

1. Функция определена на всей числовой оси $]-\infty;+\infty[$, в $y=0$ имеет конечное значение $\varphi(0)$, причем знак φ определяется знаком Q (в условии задача $Q>0$)

2. Определим области возрастания и убывания функции и точки экстремума, для чего вычислим первую производную функции

$$\varphi'(y) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\left(y^2 + R^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right)' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(y^2 + R^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{y}{(y^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

при $y \in]-\infty;0[$ $\varphi'(y) > 0$, следовательно, $\varphi(y)$ возрастает, причем на $-\infty$ $\varphi(y) \to 0$;

$y \in]0;+\infty[$ $\varphi'(y) < 0$, следовательно, $\varphi(y)$ убывает, причем на $+\infty$ $\varphi(y) \to 0$.

$\varphi'(y) = 0$ при $y=0$ – экстремум функции; $\varphi(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$ - совпадает с потенциалом поля точечного заряда только по форме, но смысл другой (в то время как $E_y(0)=0$). Уже этого достаточно, чтобы построить график качественно.

3. Для нахождения областей сохранения направления выпуклости вычислим вторую производную.

$$\varphi''(y) = \left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{y}{(y^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right)' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\left[\left(y^2 + R^2 \right)^{\frac{3}{2}} - y \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(y^2 + R^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y \right]}{\left(y^2 + R^2 \right)^3} =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\left[\left(y^2 + R^2 \right)^{\frac{3}{2}} - 3y^2 \cdot \left(y^2 + R^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left(y^2 + R^2 \right)^3}$$

$$(y^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} \cdot ((y^2 + R^2) - 3y^2) = 0, \quad y^2 + R^2 - 3y^2 = 0, \quad 2y^2 = R^2, \quad y^2 = \frac{R^2}{2}$$

$$y = \pm \frac{R^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R$$ (точки перегиба).

Проверить это можно непосредственно подставив в $\varphi''(y)$ значения y из соответствующих областей и исследуя ее знак.

К примеру: $y=0$, $\varphi''(y) < 0$, «–» - выпуклость направлена вверх;

$y=1$, $\varphi''(y) > 0$, «+» - выпуклость направлена вниз.

Теперь можно изобразить график $\varphi(y)$ как функцию y, а используя решение задачи 4.3, предыдущего раздела, построить график $E_y(y)$ и $E(y)$ для сравнения с $\varphi(y)$ и сделать выводы: 1) Точки перегиба на $\varphi(y)$ соответствуют max значениям $E_y(y)$ и $E(y)$; 2) $E_y(y)$ и $E(y)$ убывают быстрее чем $\varphi(y)$; 3) $E_y(y)$

и *E(y)* в точке *y=0* соответственно равны нулю, в то время как *φ(y)* достигает *max* значения.

6. Электроёмкость

Под уединённым проводником будем понимать проводник, находящийся на большом по сравнению с его размерами расстоянии до других проводников, тел и зарядов. Между зарядом такого проводника и его потенциалом (относительно бесконечности) существует прямая пропорциональность $q \sim \varphi$.

Следовательно, отношение $\frac{q}{\varphi}$ не зависит от заряда и для каждого уединенного проводника определяется своим значением. Эту величину называют электроёмкостью уединённого проводника (или ёмкостью)

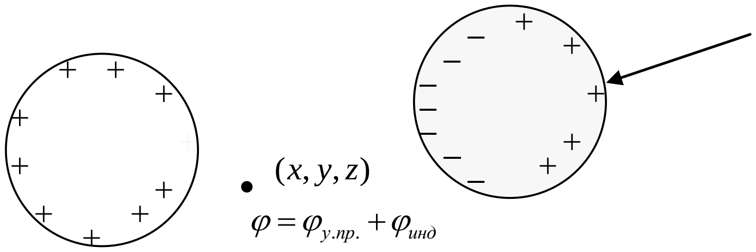
$$C = \frac{q}{\varphi}$$

Ёмкость уединённого проводника зависит от размеров и формы и не зависит от материала проводника.

Единицу ёмкости называют Фарадом, $[C]=1\Phi$. 1Φ – очень большая емкость, поэтому на практике, как известно, пользуются кратными единицами емкости: $мк\Phi$, $н\Phi$, $п\Phi$.

Таким образом, электроёмкость, как характеристика уединённого проводника, по существу показывает его способность вмещать электрический заряда, но не зависит от величины этого заряда.

Устройства, позволяющие накапливать заметные по величине заряды и сохранять их, получили название конденсаторов. В основу работы конденсаторов положен тот факт, что потенциал заряженного уединённого проводника уменьшается при приближении к нему других проводников. Это возможно вследствие того, что возникающие индуцированные заряды противоположного знака на подносимых проводниках, в конечном итоге приводят к уменьшению потенциала собственных зарядов заряженного проводника в произвольной точке, поскольку φ, определяется алгебраической суммой потенциалов, как зарядов самого уединённого проводника $\varphi_{у.пр.}$, так и индуцированных зарядов $\varphi_{инд}$ на других проводниках.



Этот факт, согласно определению ёмкости уединённого проводника, приводит к увеличению емкости заряженного первоначально уединённого проводника. Существенной особенностью устройства конденсатора является наличие двух проводников – обкладок, которым можно придать различную форму. Тогда, как следствие, конденсатор принято называть: плоским, сферическим, цилиндрическим. Основной характеристикой является его емкость.

Ёмкость конденсатора.

Под ёмкостью конденсатора понимают величину, пропорциональную заряду конденсатора q и обратно пропорциональную разности потенциалов между обкладками

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Величину $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ принято называть напряжением конденсатора, а под q, понимать заряд, расположенный на положительной обкладке конденсатора. Тогда, ёмкость конденсатора в общем виде может быть представлена как

$$C = \frac{q}{U}$$

Емкость конденсатора измеряется в тех же единицах, что и емкость уединенного проводника. Величина ёмкости конденсатора зависит от его геометрических размеров, формы обкладок и свойства среды между ними.

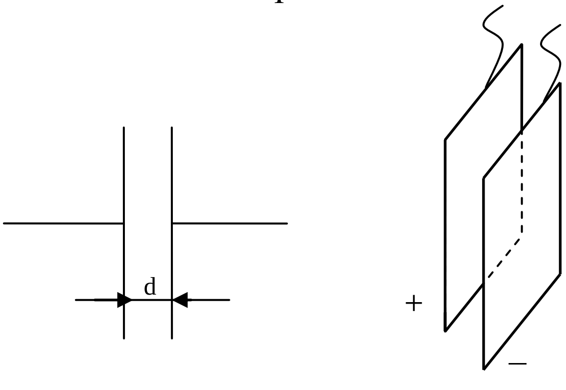
Задача по расчёту ёмкости конденсатора, связана с нахождением разности потенциалов между его обкладками, используя общее определение разности потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{E}, d\vec{r}) = \int_{(1)}^{(2)} E_n dr .$$

Как видно из последнего выражения она сводиться к нахождению напряжённости поля $\vec{E}$ созданного обкладками конденсатора.

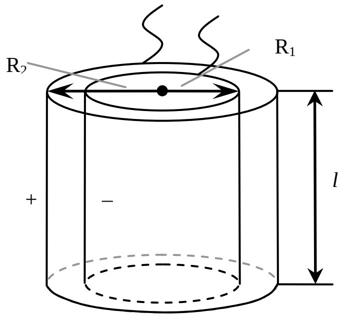
Основные виды конденсаторов и их характеристики.

1) Плоский конденсатор



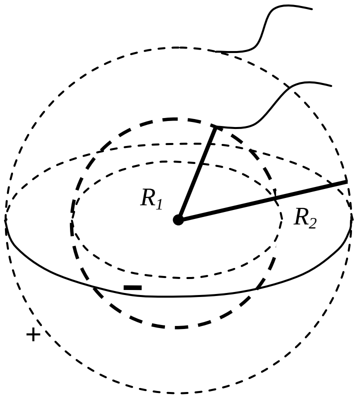
$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

2) Цилиндрический конденсатор



$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

2) Сферический конденсатор



$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}$$

В качестве диэлектрика используется обычно слюда диэлектрическая проницаемость порядка $\varepsilon \approx 4-8$, парафин, стекло с $\varepsilon \approx 3-5$.

Задачи для решения

6.1 Получить уравнение для ёмкости конденсаторов: плоского, цилиндрического, сферического.

6.2 Получить формулу параллельного и последовательного соединения конденсаторов.

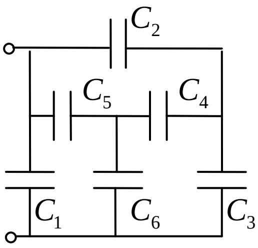
6.3 Показать, что формулы для ёмкости цилиндрического и сферического конденсаторов переходят в формулу для ёмкости плоского конденсатора при малых расстояниях между радиусами внутренней и внешней обкладок.

6.4 Одной из пластин плоского конденсатора ёмкостью C сообщил заряд $+|Q|$, другой $-4|Q|$. Найти разность потенциалов между пластинами конденсатора.

6.5 Вычислить ёмкость цилиндрического конденсатора, если его длинна $50\,см$, радиус внутреннего цилиндра $4\,см$, внешнего $9\,см$ и полость между цилиндрами по всей длине конденсатора заполнена трансформаторным маслом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2{,}2$.

6.6 Напряжённость поля заряженного плоского конденсатора с расстоянием между пластинами $6\,см$ равна $150\,\frac{В}{см}$. Параллельно пластинам в конденсатор вносится незаряженная металлическая пластина толщиной $1{,}5\,см$. Найти разность потенциалов между пластинами конденсатора до и после внесения металлической пластины.

6.7 Найти ёмкость батареи конденсаторов, изображённой на рисунке, если ёмкость каждого конденсатора равна C.



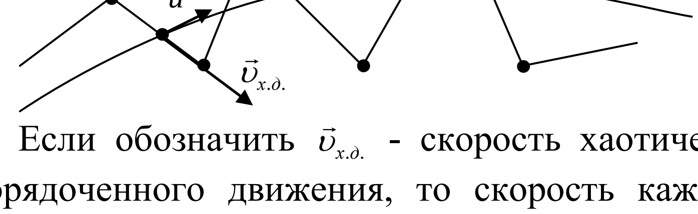
6.8 Одному шарику сообщили заряд $13\,нКл$, другому заряд $18\,нКл$, затем шарики соединили проводником. Найти окончательное распределение зарядов на шариках, находящихся далеко друг от друга. Радиус первого шарика $8\,см$, второго $18\,см$. Ёмкостью соединительного проводника пренебречь.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Под электрическим током принято понимать упорядоченное движение электрических зарядов. Эти заряды в учении о токах получили название носителей тока.

Как известно, вещество, в котором возможно существование тока получило название проводников. Проводниками являются металлы, полупроводники, жидкости (электролиты), и при определенных условиях газы. Носителями тока в этих проводящих средах являются либо электроны (в металлах), либо ионы (например, в электролитах), либо другие частицы.

Природа носителей тока зависит от природы среды, где возникает электрический ток. Упорядоченность движения носителей тока обеспечивается действием сил электрического поля. При отсутствии электрического поля носители тока участвуют только в беспорядочном хаотическом движении. Под действием электрического поля, наряду с хаотическим движением, они уже участвуют и в упорядоченном (дрейфовом) движении в сторону действующей на них силы. Упрощённо это можно представить следующим образом



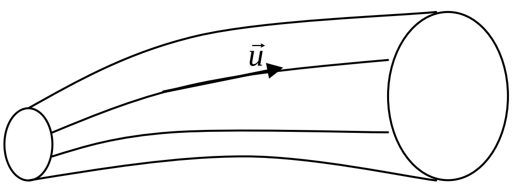
Если обозначить $\vec{\upsilon}_{х.д.}$ - скорость хаотического движения, $\vec{u}$ - скорость упорядоченного движения, то скорость каждого носителя тока $\vec{\upsilon}$ будет складываться из их суммы $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{х.д.} + \vec{u}$. Поскольку в образовании тока участвует много частиц, то для характеристики их движения необходимо пользоваться усреднёнными по числу частиц, значениями физических величин. Учитывая это, среднюю по числу частиц скорость носителей тока, к примеру, можно представить в виде

$$\overline{(\vec{\upsilon})} = \overline{(\vec{\upsilon}_{х.д.} + \vec{u})} = \overline{(\vec{\upsilon}_{х.д.})} + \overline{(\vec{u})}$$

Отметим любопытный факт. Абсолютные значения средних скоростей значительно различаются. Если средний модуль скорости хаотического движения оказывается порядка $10^6 \frac{м}{с}$, то средний модуль скорости упорядоченного движения, около $10^{-4} \frac{м}{с}$. Роль этих скоростей в процессе образования тока неравнозначная. В последнем выражении среднее значение векторной величины $\overline{(\vec{\upsilon}_{х.д.})} = 0$. Это утверждение основано на положении о молекулярном хаосе, согласно которому носители тока обладают скоростями, равномерно распределенными по всем направлениям в пространстве, а по абсолютной величине их скорости могут изменяться от величин бесконечно малых до величин бесконечно больших. Это означает, что число носителей тока движущихся во всех возможных направлениях в какой-либо выбранный момент времени, должно быть одинаковым. Говорят, что эти направления равновероятны. Следовательно, векторная сумма скоростей всех носителей тока в этот момент времени равна нулю. Тогда

$$\overline{(\vec{\upsilon})} = \overline{(\vec{\upsilon}_{х.д.} + \vec{u})} = \overline{(\vec{u})}$$

Из последнего выражения следует, что средняя скорость носителей тока будет определяться средней скоростью их упорядоченного движения. Движение носителей тока происходит по траекториям, которые принято называть линиями тока. Понятие линии тока аналогично понятию линии напряжённости электрического поля. Линии тока проведены так, что касательные к ним в каждой точке совпадают со скоростью упорядоченного движения носителей тока. Изображая линии тока в пространстве, получают наглядное представление о движении носителей тока. Если внутри проводника с током, мысленно выделить область пространства в виде трубки, у которой боковая поверхность состоит из линий тока, то такую трубку принято называть трубкой тока.



Носители тока, поскольку их движение происходит только по линиям тока, следовательно, не могут пересекать поверхность трубки и, не будут ни выходить из неё, ни входит извне в трубку.

Если скорость упорядоченного движения носителей тока в данной точке не изменяется, то есть, стационарна, то такой электрический ток получил название постоянного. В этом случае «картина», связанная с линиями тока, так же остается неизменной.

Для количественной характеристики электрического тока вводят физические величины: плотность тока и силу тока.

Плотность тока.

Под плотностью тока понимают физическую величину, численно равную заряду, проходящему в единицу времени через единицу поперечного сечения проводника, поверхность сечения которого перпендикулярна к линиям тока. Будем обозначать ее $\vec{j}$. Это векторная величина.

Её можно представить как

$$\vec{j} = q \cdot n \cdot \vec{u}$$

Исторически сложилось так, что за направление вектора плотности тока $\vec{j}$, принимают направление вектора скорости упорядоченного движения положительных носителей зарядов $\vec{u}$. В действительности в проводниках первого рода (к примеру, металлы) электрический ток представляет собой движение электронов, то есть отрицательно заряженных частиц.

Поскольку носителями тока могут быть как положительные, так и отрицательные заряды, то плотность тока определяется как

$$\vec{j} = \underbrace{q_+ n_+ \vec{u}_+}_{\vec{j}_+} + \underbrace{q_- n_- \vec{u}_-}_{\vec{j}_-},$$

где «+» - относится к положительным зарядам, а «–» - к отрицательным зарядам. Заметим, что векторы, составляющие плотность тока в последнем выражении направлены в одну сторону и это направление определяется направлением движения положительных носителей тока.

Последнее уравнение легко обобщить на случай произвольного числа N носителей тока

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot n_i \cdot \vec{u}_i$$

Единица плотности тока в СИ $[j] = 1\dfrac{A}{м^2}$.

Количественной мерой электрического тока служит сила тока.

Под силой тока понимают физическую величину, численно равную заряду, проходящему в единицу времени через поверхность полного сечения проводника

$$I = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

Сила тока связана с плотностью тока простым соотношением. Если в каждой точке интересующей нас поверхности задан вектор плотности тока, то силу тока можно найти как поток этого вектора

$$I = \int_S (\vec{j}, d\vec{S})$$

В общем случае векторы $\vec{j}$ и $d\vec{S}$ могут быть направлены по отношению друг к другу произвольно. Из последнего выражения видно, что сила тока I – величина скалярная и алгебраическая.

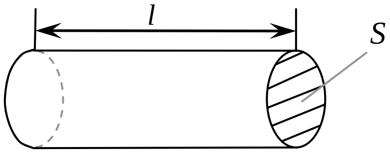
7. Закон Ома

Закон Ома для однородного участка цепи в интегральной форме.

Сила тока, протекающего по однородному проводнику, пропорциональна разности потенциалов на его концах

$$I = \frac{U}{R}$$

В последнем выражении под R понимают электрическое сопротивление проводника, которое зависит в общем случае от формы, размеров, материала, температуры, а также от распределения тока по проводнику (конфигурации тока). В простейшем случае однородного проводника цилиндрической формы, длиной l и площадью поперечного сечения проводника S



его сопротивление определяется соотношением

$$R = \rho \cdot \frac{l}{\mathrm{S}},$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление. Единицами сопротивления и удельного сопротивления являются соответственно $[\mathrm{R}] = 1\,Ом$, $[\rho] = 1\,Ом \cdot м$. Удельное сопротивление проводника величина достаточно малая. В качестве примера можно привести значение удельного сопротивления ρ для меди Cu ($1{,}7 \cdot 10^{-8} Ом \cdot м$) и алюминия Al ($2{,}5 \cdot 10^{-8} Ом \cdot м$), материалов, которые широко используются в практике. Как видно, оно оказывается порядка $\sim 10^{-8} Ом \cdot м$.

Закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме.

Плотность тока в произвольной точке однородной проводящей среды пропорциональна напряжённости электрического поля в этой же точке

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$\sigma = \frac{1}{\rho}$ - удельная электрическая проводимость (удельная электропроводимость среды). Единицей удельной электропроводимости является сименс на метр $[\sigma] = 1\frac{См}{м}$ (Сименс ($См$) – $Ом^{-1}$). Для проводников $\sigma \approx 10^5 - 10^7 \frac{См}{м}$. Для полупроводников $\sigma \approx 10^5 - 10^{-8} \frac{См}{м}$. Для диэлектриков $\sigma \approx 10^{-8} - 10^{-18} \frac{См}{м}$.

Обобщенный закон Ома для неоднородного участка цепи в дифференциальной форме.

Очевидно, что там, где кроме электростатических сил на носители тока действуют сторонние силы (неоднородный участок), плотность тока определяется уже не только напряжённостью электростатического поля, но и напряжённостью поля сторонних сил

$$\vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}})$$

<u>Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС (неоднородного участка) в интегральной форме.</u>

$$I \cdot R = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{1,2}$$

или

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + E_{1,2}}{R} \; .$$

Под величиной R в последних выражениях надо понимать полное сопротивление участка, включая внутреннее (сопротивление источника) и внешнее (сопротивление на внешнем по отношению к источнику участке цепи).

<u>Закона Ома для замкнутой цепи.</u>

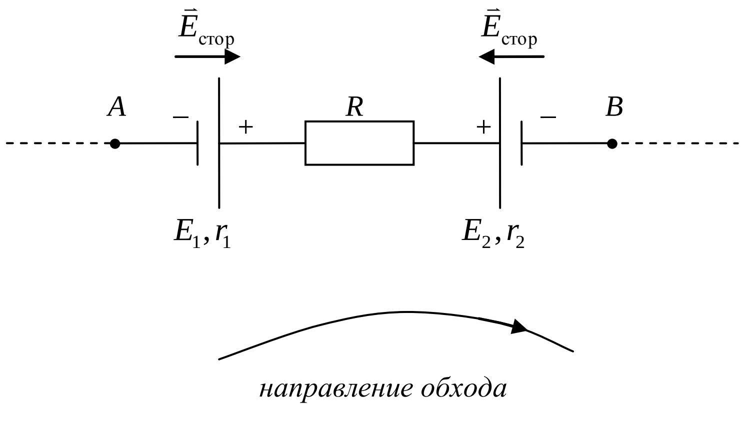
В случае, если электрическая цепь замкнута φ_1=φ_2, то полное сопротивление принято представлять в виде суммы сопротивлений R внешней цепи и внутреннего сопротивления r источника. Тогда

$$I = \frac{E}{R + r}$$

Причем в этом уравнении под E надо понимать алгебраическую сумму всех ЭДС в данной цепи.

<u>Правило знаков.</u>

Для определения знака E существует договоренность - правило знаков, которое состоит из нескольких утверждений. Рассмотрим применение правила на конкретном примере. Пусть имеется неоднородный участок цепи, содержащий два источника тока, включенных так, как показано на рисунке.



1. Необходимо выбрать направление обхода (пусть АВ).
2. Э.Д.С. источника приписывают положительный знак, если направление обхода и напряженность поля сторонних сил совпадают, и отрицательный знак, если направление обхода и напряжённость поля сторонних сил противоположны друг другу.

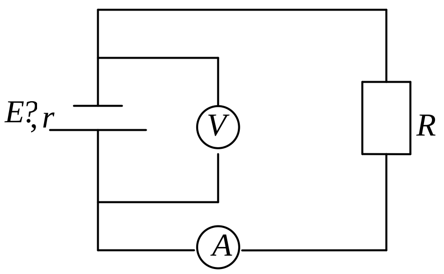
Так как, исторически, за направление тока принято направление положительных зарядов, то есть ток течёт от «+» к «–» (перенос положительных зарядов от «+» к «–»), то источник должен обеспечивать постоянное появление положительных носителей у положительного «+» полюса источника, перемещая их от отрицательного «–». Следовательно, напряженность поля сторонних сил внутри источника направлена от отрицательного полюса источника к положительному полюсу.

Применяя это правило, приходи к выводу, что для нашего случая $E_1 > 0$, а $E_2 < 0$, тогда суммарное Э.Д.С. равно $E = E_1 - E_2$.

Задачи для решения

7.1 В течение $20\,с$ сила тока, равномерно возрастала от 0 до $5\,A$. Какой заряд был перенесён?

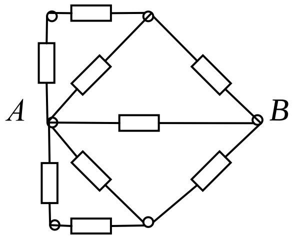
7.2 Электрическая цепь состоит из источника тока с внутренним сопротивлением $0,2\,Ом$ и внешнего сопротивления $12,0\,Ом$. Найти силу тока во внешней цепи, ЭДС источника, если вольтметр показывает $120\,В$; сопротивление, которое необходимо подключить во внешнюю цепь, чтобы получить от источника силу тока $1\,A$, а также силу тока в цепи и показание вольтметра при коротком замыкании источника. Сопротивлением амперметра (вольтметра) пренебречь.



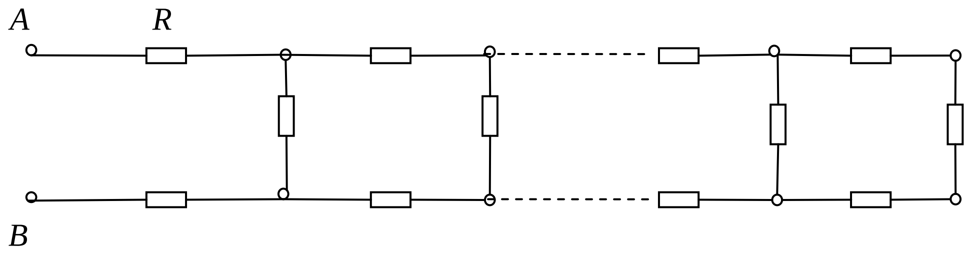
7.3 Батарея из двух параллельно соединённых источников с ЭДС 2 и $1,8\,В$, с внутренним сопротивлением $50\,мОм$ каждый замкнута проводником сопротивлением $2\,Ом$. Найти силу тока в проводнике и в каждом источнике. Рассмотреть для случая последовательного и параллельного соединения.

7.4 Из медной проволоки длиной $120\,м$ и площадью поперечного сечения $24\,мм^2$ намотана катушка. Найти приращение сопротивления катушки при нагревании её от $20°$ до $70°$.

7.5 Найти общее сопротивление участка цепи между точками A и B, если сопротивление каждого проводника равно R.



7.6 Найти общее сопротивление участка цепи, содержащее бесконечное число проводников сопротивлением R каждый.



Примеры решения задач

7.3 Батарея из двух параллельно соединённых источников с ЭДС 2 и $1{,}8\,B$, с внутренним сопротивлением $50\,мОм$ каждый замкнута проводником сопротивлением $2\,Ом$. Найти силу тока в проводнике и в каждом источнике. Рассмотреть для случая последовательного и параллельного соединения.

Решение.

Последовательно рассмотрим два случая:

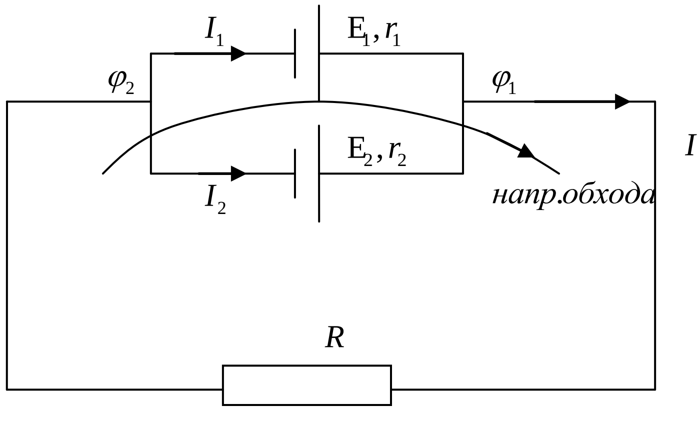
а) Параллельное соединение двух источников. При параллельном соединении положительные полюсы отдельных источников и их отрицательные полюсы, соединяются между собой, образуется два полюса батареи.

б) При последовательном соединении один из полюсов отдельного источника соединяется с другим полюсом противоположного знака другого источника, образуя, таким образом, батарею источников. В общем случае, возможно соединение и с одинаковым по знаку полюсом другого источника.

а) Сила тока в такой цепи определяется законом Ома в виде

$$I = \frac{\mathrm{E}}{(R+r)},$$

где E - э.д.с. батареи источников, r - внутреннее сопротивление этой батареи. Задача, в этой части, сводится к ответу на вопрос о том, как отыскать E батареи при параллельном соединении E_1 и E_2. Укажем направление токов в участках цепи и выберем общее направление обхода в контуре.



Рассмотрим неоднородный участок цепи между точками потенциал котороых соответственно равен φ_1 и φ_2. Так как он содержит два э.д.с., то согласно закона Ома для неоднородного участка, учитывая правило знаков, запишем два уравнения

$$I_1 r_1 = \varphi_2 - \varphi_1 + \mathrm{E}_1$$

$$I_2 r_2 = \varphi_2 - \varphi_1 + \mathrm{E}_2$$

Складывая, почленно обе части этих уравнений получим

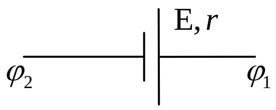
$$I_1 r_1 + I_2 r_2 = 2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$$

Так, как $r_1 = r_2 = r'$ и $I_1 = I_2 = I$, то

$$(I_1 + I_2) \cdot r' = 2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$$

$$I \cdot \frac{r'}{2} = (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2}{2}$$

Последнее уравнение, по существу, означает, что представленную схему, состоящую из двух параллельно соединённых источников можно заменить эквивалентной, с э.д.с. $\mathrm{E} = \frac{\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2}{2}$ и внутренним сопротивлением $r = \frac{r'}{2}$, для которой



будет справедлив закон Ома в виде $I \cdot r = \varphi_2 - \varphi_1 + \mathrm{E}$.

Полученный результат можно обобщить на случай параллельного соединения произвольного числа одинаковых источников. При параллельном соединении источников с одинаковым значением э.д.с. $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_3 = \ldots = \mathrm{E}_n = \mathrm{E}'$ и внутреннего сопротивления $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_n = r'$, э.д.с. батареи равно э.д.с. одного источника $\mathrm{E} = \mathrm{E}'$, а внутреннее сопротивление батареи во столько раз меньше сопротивления одного источника, сколько источников соединено параллельно $r = \frac{r'}{n}$.

Теперь можно определить значение тока в цепи как

$$I = \frac{\frac{\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2}{2}}{(R + \frac{r'}{2})}$$

Простой расчёт даёт это значение тока

$$I = \frac{\frac{2 + 1,8}{2}}{(2 + \frac{0,050}{2})} \approx 0,94\ A$$

Напомним, что положительное значение тока говорит о том, что выбранное нами произвольным образом направление тока I в контуре, оказалось верным.

Для определения токов I_1 и I_2, можно воспользоваться ранее уже записанными уравнениями

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_1}{r_1}$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_2}{r_2}$$

в которых учтём, что разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ можно определить из выражения для эквивалентной схемы батареи источников, с уже известным значением силы тока I и не вызывающим затруднения подсчётом значений E и r

$$\varphi_2 - \varphi_1 = I \cdot r - E$$

Тогда для токов I_1 и I_2 получаем выражения

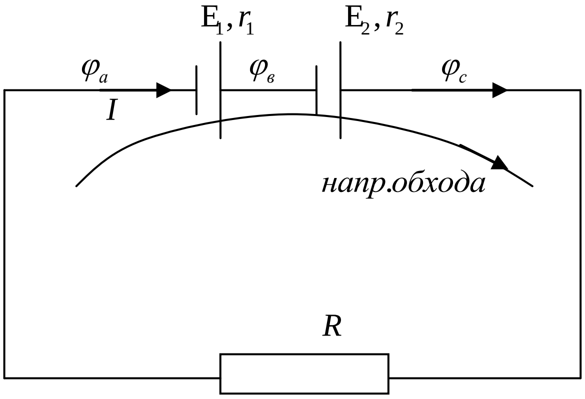
$$I_1 = \frac{I \cdot r - E + E_1}{r_1}$$

$$I_2 = \frac{I \cdot r - E + E_2}{r_2}$$

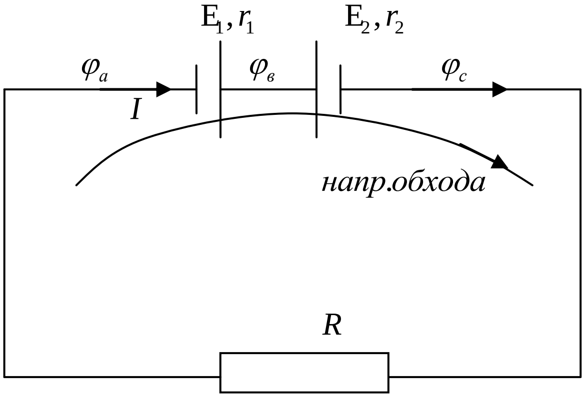
Непосредственно убеждаемся что $I_1 \approx 2{,}47\ A$, $I_2 \approx -1{,}53\ A$. Отрицательное значение тока I_2 говорит о том, что его истинное направление противоположно выбранному.

б) При рассмотрении последовательного соединения источников возможны два варианта

1)



2)



1)Рассмотрим первый вариант соединения источников в батарею. Выберем произвольно направление тока в цепи и направление обхода в контуре. В силу закона сохранения заряда, в неразветвлённой цепи сила тока I во всех её участках, в том числе и через оба источника тока, имеет одно и тоже значение, которое определяется законом Ома

$$I = \frac{\mathrm{E}}{(R+r)},$$

где E - э.д.с. батареи источников, r - внутреннее сопротивление батареи источников. Как и в предыдущем случае, задача сводится к ответу на вопрос о том, как отыскать э.д.с батареи, образованной последовательным соединением источников с э.д.с. равными значениями E_1 и E_2. Тогда для неоднородных участков φ_a-φ_b и φ_b-φ_c справедливы соответственно выражения

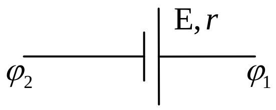
$$I \cdot r_1 = \varphi_a - \varphi_b + \mathrm{E}_1$$

$$I \cdot r_2 = \varphi_b - \varphi_c + \mathrm{E}_2$$

Складывая почленно обе части выражений, получим

$$I(r_1 + r_2) = \varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_c + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$$

Учитывая, что $r_1 = r_2 = r'$, $I \cdot 2r' = \varphi_a - \varphi_c + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$. Последнее уравнение означает, как и в предыдущем случае, что представленную схему, состоящую из двух последовательно соединённых источников, можно заменить эквивалентной с э.д.с. $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$ и внутренним сопротивлением $r = 2 \cdot r'$, для которой



будет справедлив закон Ома в виде $I \cdot r = \varphi_2 - \varphi_1 + \mathrm{E}$.

Полученный вывод обобщим на случай произвольного числа одинаковых источников. При последовательном соединении n- одинаковых источников тока э.д.с. E полученной батареи, и её внутреннее сопротивление r, в n- раз больше, чем у одного источника.

Искомый ток в проводнике, следовательно, определяется как

$$I = \frac{\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2}{(R + 2r')},$$

а его значение $I = \dfrac{2 + 1{,}8}{(2 + 2 \cdot 0{,}050)} \approx 1{,}81\ A$.

Этот же ток будет протекать через каждый из источников.

2) Второй вариант соединения источников в батарею предоставим возможность рассмотреть самостоятельно, ограничившись общим конечным выражением для силы тока в проводнике и через каждый из источников

$$I = \frac{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2}{(R + 2r')}.$$

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Как было показано экспериментально Эрстедом, а в последствии Ампером, электрический ток, текущий по проводнику, оказывает ориентирующее действие на магнитную стрелку, а два прямолинейных провода определенным образом взаимодействуют друг с другом. Это взаимодействие, получило название магнитного взаимодействия. Как было показано позднее, его можно объяснить посредством магнитного поля.

Итак, магнитное поле обусловлено токами, то есть упорядоченным движением заряженных частиц, то есть движущимися частицами. Магнитное поле – объективная характеристика. Оно материально. Как и в электростатике, при анализе магнетизма выделяют прямую и обратную задачу.

Основные задачи магнетизма:

Прямая задача состоит в том, что бы по заданным токам, определить магнитное поле, созданное этими токами.

Обратная задача заключается в том, что бы по известному магнитному полю, определить распределение токов, создающих это поле.

Прямая задача в общем виде не решается. Обратная задача строго решается элементарно, используя уравнение Максвелла.

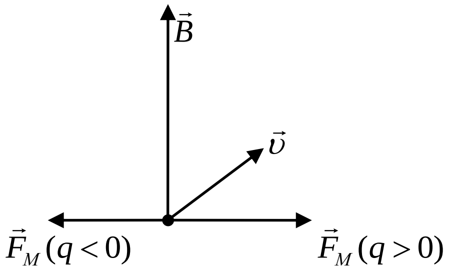
8. Магнитная индукция. Сила Лоренца. Закон Био-Савара-Лапласа

Основной характеристикой магнитного поля, как известно, является вектор магнитной индукции $\vec{B}$. Единицей индукции магнитного поля служит тесла (Тл), $[\mathrm{B}] = 1\,Тл$.

Наличие магнитного поля в пространстве проявляется в отличие от электростатического, в действие только на движущиеся заряды. Как известно, действие характеризует сила. На движущуюся частицу зарядом q действует со стороны магнитного поля с индукцией $\vec{B}$ магнитная сила

$$\vec{F}_M = q \cdot \left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]$$

Формула, определяющая вектор силы, представляет собой векторное произведение вектора скорости частицы в данной точке пространства $\vec{\upsilon}$ и вектора индукции $\vec{B}$, характеризующего магнитное поле в той же точке. Это произведение, как известно, является вектором, перпендикулярным плоскости, образованной векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$. Направление этого векторного произведения, легко определить, с помощью любого мнемонического правила. Например, правила правого винта, широко известного, как «правило буравчика». Однако, необходимо помнить, что в конечном итоге на направление вектора силы, влияет знак заряда q. Если он положителен, направление вектора силы совпадает с направлением векторного произведения. Если отрицательный - направление вектора силы, будет противоположно результату векторного произведения. Поясним сказанное на рисунке.



Сила Лоренца.

С учетом силы, действующей на заряд q в электростатическом поле, электромагнитная сила, действующая на заряд со стороны электрического и магнитного поля, определяется их суммой

$$\vec{F} = q\cdot\vec{E} + q\cdot\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]$$

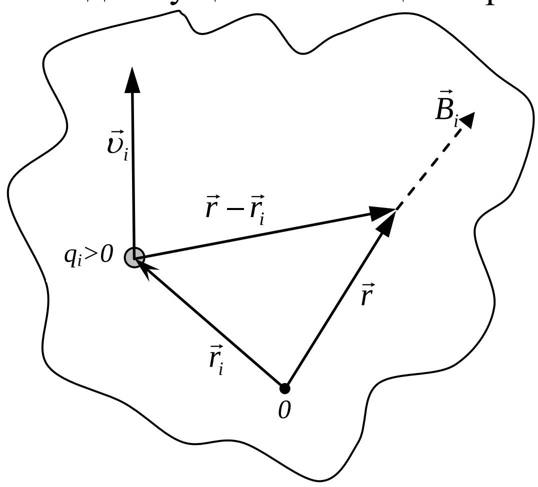
Силу, определяемую последним уравнением, принято называть силой Лоренца. Это выражение можно рассмотреть как определение.

Магнитное поле частицы, движущейся с постоянной скоростью.

Движущаяся с постоянной скоростью частица, зарядом q, создает в произвольной точке пространства магнитное поле

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{q_i\left[\vec{\upsilon}_i,\vec{r}-\vec{r}_i\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3},$$

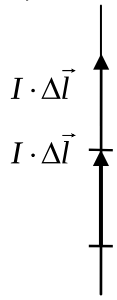
где $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$. Приведённое выражение для магнитного поля движущейся с постоянной скоростью частицы, надо рассматривать, как определение. Поясним, с помощью рисунка, правила нахождения магнитного поля движущейся частицы в произвольной точке пространства.



Элемента тока.

Малый участок тонкого провода с током, можно характеризовать векторной величиной, которую называют элементом тока.

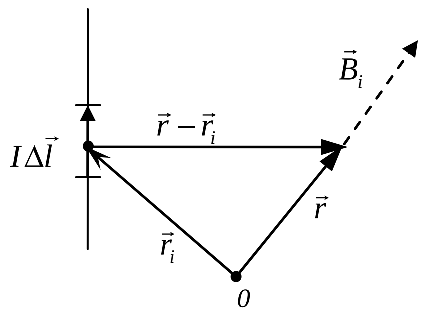
Линейный элемент тока – это вектор $I\Delta\vec{l}$, абсолютная величина которого равна произведению силы тока I на длину Δl бесконечно малого участка проводника, а направление совпадает с направлением тока в этом участке.



Соответственно этому определению, можно ввести и объемный элемент тока. Поскольку $Id\vec{l} = \left(\vec{j}, d\vec{S}\right)d\vec{l} = \vec{j}dV$.

Закон Био-Савара-Лапласа.

Этот закон отвечает на вопрос о магнитном поле, которое создается линейным элементом тока в произвольной точке пространства. Пусть есть линейный элемент тока $I\Delta\vec{l}_i$. Выберем произвольно систему отсчёта. Зададим положение линейного элемента тока с помощью радиус-вектора $\vec{r}_i$, который проведём из начало координат в произвольную точку находящуюся внутри элемента. С помощью радиус-вектора $\vec{r}$, укажем положение произвольной точки пространства. Введём вектор $\vec{r} - \vec{r}_i$.



Тогда, поле созданное этим элементом тока в рассматриваемой точке пространства будет определяться следующим выражением

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \left[\Delta\vec{l}_i, \vec{r} - \vec{r}_i\right]}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}.$$

Это выражение и есть математическое выражение закона Био-Савара-Лапласа. Направление магнитного поля легко определить с помощью правила правого винта.

Опыт показывает, что для магнитного поля справедлив принцип суперпозиции.

Принцип суперпозиции магнитного поля.

Магнитное поле, создаваемое несколькими токами в произвольной точке пространства равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым током в этой точке в отдельности

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i$$

Благодаря этому принципу мы можем находить магнитное поле, создаваемое произвольно распределёнными токами любой конфигурации (линейные, объемными, поверхностными). Это выражение справедливо также и для определения магнитного поля, создаваемого движущимися зарядами.

Для нахождения магнитного поля произвольных токов поступают следующим образом. Мысленно разбивают токи на конечные элементы тока $I\Delta\vec{l}$. При этом переходят к промежуточной модели – системе элементов тока. Пользуясь принципом суперпозиции для магнитного поля и совершая предельный переход, необходимость которого диктуется возвращением к непрерывным произвольным токам, находим магнитное поле в заданной точке. Это поле и есть искомое поле, созданное произвольными токами.

Задачи для решения

8.1 Электрон движется прямолинейно и равномерно со скоростью $3\cdot10^5\ \frac{м}{с}$. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого электроном в точке, находящейся от него на расстоянии $1.00\cdot10^{-9}\ м$ и лежащей на перпендикуляре к вектору скорости, проходящем через мгновенное положение электрона.

8.2 Найти отношение силы электростатического взаимодействия двух движущихся со скоростью $\upsilon \ll c$ электронов к силе их магнитного взаимодействия.

8.3 По двум параллельным бесконечно длинным проводникам, находящимся на расстоянии $10\ см$ друг от друга, текут токи противоположного направления $30\ А$. Определить магнитную индукцию поля в точке, расположенной посередине между проводниками. Чему равна магнитная индукция поля в точке, которая находится на расстоянии $15\ см$ от одного и $5\ см$ от другого проводника.

8.4 Чему равна магнитная индукция поля на оси кругового витка в точке, расположенной на расстоянии $40\ см$ от центра, если в центре витка, радиус которого $30\ см$, индукция $25\ мкТл$?

8.5 Определить силу тока в катушке радиусом $30\ см$, содержащей 600 витков, если в центре катушки магнитное индукция равна $7{,}5\ мТл$. Считать, что длина катушки значительно меньше её радиуса.

8.6 Найти магнитную индукцию поля в центре соленоида длиной $20\ см$ и диаметром $4\ см$, содержащего 400 витков, если сила тока в обмотке соленоида.

Примеры решения задач

8.4 Чему равна магнитная индукция поля на оси кругового витка в точке, расположенной на расстоянии $40\ см$ от центра, если в центре витка, радиус которого $30\ см$, индукция $25\ мкТл$?

Решение.

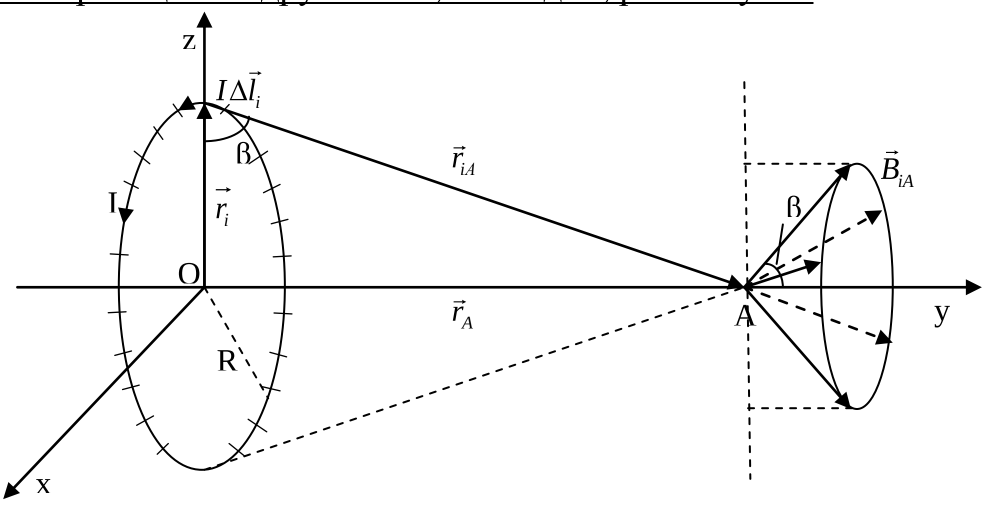
Согласно закона Био-Савара-Лапласа

$$\overrightarrow{B_i} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\left[\Delta\vec{l_i}, \vec{r} - \vec{r_i}\right]}{\left|\vec{r} - \vec{r_i}\right|^3}$$

Разобьем мысленно виток с током на произвольное количество N элементов и запишем закон Био- Савара-Лапласа для произвольного элемента с током (выбрав внутри элемента опорную точку произвольно). Укажем положение элемента и точки A соответствующими радиус-векторами $\vec{r_i}$ и $\overrightarrow{r_A}$ направленными из точки О. Тогда поле, созданное i-ым элементом в точке A, запишем как

$$\overrightarrow{B_{iA}} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\left[\Delta\vec{l_i}, \overrightarrow{r_A} - \vec{r_i}\right]}{\left|\overrightarrow{r_A} - \vec{r_i}\right|^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\left[\Delta\vec{l_i}, \overrightarrow{r_{iA}}\right]}{\left|\overrightarrow{r_{iA}}\right|^3}$$

Определим направление поля в точке A, созданного этим же элементом, для чего воспользуемся свойством векторного произведения. Определяя поле аналогичным образом от других элементов, нетрудно понять, что картина совокупности векторов $\overrightarrow{B_{iA}}$ будет представлять симметричный конус, длина образующей которого соответствует модулю поля, созданного отдельным элементом тока, вершина конуса будет находиться на оси витка с током. В силу симметрии поле на оси витка, очевидно, будет определяться суммой проекций полей, созданных отдельными элементами на эту ось. Суммарная проекция на другие оси, очевидно, равна нулю.



Выберем систему координат так, чтобы одна из осей совпадала с осью витка, а две другие, образуя плоскость, совпадали бы с плоскостью витка. Тогда

$$B_{iAy} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\Delta l_i \cdot r_{iA} \cdot \sin\alpha}{r_{iA}^{\;3}} \cdot \cos\beta\,,$$

так как $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = 1$, $\beta = const$, $r_{iA} = \sqrt{y^2 + R^2}$. Из рисунка нетрудно видеть, что $\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{y^2 + R^2}}$. Тогда, учитывая непрерывность распределения тока в витке (возвращаемся к сплошному витку), принцип суперпозиции для магнитного поля запишется следующим образом

$$B_{Ay} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\Delta l_i \cdot R}{\left(y^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR}{\left(y^2 + R^2\right)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi R} dl =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR}{\left(y^2 + R^2\right)^{3/2}} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{IR^2}{\left(y^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Итак, на оси кругового витка в произвольной точке A проекция индукции магнитного поля и его величина соответственно равны

$$B_{Ay} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{IR^2}{\left(y^2 + R^2\right)^{3/2}}, B_A = \left|B_{Ay}\right|.$$

Последнее выражение представляет собой общее решение задачи, которое позволяет определить как направление вектора индукции магнитного поля (по знаку проекции), так и величину индукции магнитного поля. Проекции на оси OX и OZ равны нулю $B_{Ax} = B_{Az} = 0$.

Рассмотрим частный случай этого решения когда $y = 0$ (поле в центре витка с током) $B_O = \frac{\mu_0 I}{2R}$. Величина поля в произвольной точке оси витка, когда $y = a$, определяется выражением

$$B_A = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{IR^2}{\left(a^2 + R^2\right)^{3/2}}.$$

С учётом B_O, последнее выражение принимает вид

$$B_A = B_O \cdot \frac{R^3}{\left(a^2 + R^2\right)^{3/2}}.$$

Заметим, что полученное выше решение задачи в общем виде, позволяет ответить на вопрос о том, как распределяется поле на оси витка. Для этого необходимо исследовать функцию на экстремум, а так же определить точки перегиба. Результат исследования может быть представлен на графике $B = B(y)$. Предлагаем это сделать самостоятельно.

С учётом данных задачи, магнитная индукция поля (следовательно направление и модуль) на оси кругового витка в заданной точке определяется простым расчетом

$$B_{Ay} = B_0 \cdot \frac{R^3}{\left(a^2 + R^2\right)^{3/2}} = 25 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(0,3)^3}{\left((0,4)^2 + (0,3)^2\right)^{3/2}} = 5,4 \cdot 10^{-6}\ Тл.$$

Напомним, что поскольку $B_{Ay} > 0$, поле в данной точке сонаправленно с положительным направлением оси OY. Величина индукции магнитного поля определяется модулем этого значения и равна $B_A = 5,4 \cdot 10^{-6}\ Тл$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И.В. Курс общей физики : учебное пособие для вузов:[в 3т.] Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. –5-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2006. – 496с.
2. Иродов И.Е. Электромагнетизм:Основные законы : учеб.пособие для вузов / И.Е.Иродов .— 5-е изд. — М. : Бином:Лаборатория Знаний, 2006 .— 320с.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. М.: изд-во «Наука», Т.3, 1983, 687 с.
4. Калашников С.Г. Электричество. М.: изд-во «Наука», 1985, 576 с.
5. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М.: изд-во «Высшая школа», 1983, 463 с.
6. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М. Электричество и магнетизм. Лекции по физике. Тул. гос. ун-т, Тула, 1999, 140 с.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике : учеб.пособие для вузов / И.Е.Иродов .— 7-е изд.,стер. — М. : БИНОМ.Лаборатория знаний, 2007 .— 431с.
8. Загуста Г.А., Макеев Г.П., Микулич А.С. и др. Сборник задач по курсу общей физики: под редакцией Цедрика М.С. – М.: изд-во «Просвещение», 1989, 271 с.
9. Иродов И.Е., Савельев И.В., Замша О.И. Сборник задач по общей физике: под редакцией Севельева И.В. – М.: изд-во «Наука», 1975, 320 с.
10. Стрелков С.П, Сивухин Д.В., Хайкин С.Э., Эльцин И.А., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. Электричество и магнетизм. - М.: изд-во «Наука», 1977, 272 с.
11. Кудрявцев П.С. Курс истории физики. М.: «Просвещение», 1982, 447 с.

Учебно-методическое издание

ГОРБУНОВА Ольга Юрьевна
КУЗНЕЦОВ Анатолий Михайлович

Методические указания по проведению практических занятий по курсу общей физики: «Электричество и магнетизм» ***(в теории и задачах)***

Методическое пособие для студентов инженерных специальностей

Оригинал-макет подготовлен авторами

Авторское редактирование

Изд.лиц. ЛР №020300 от 12.02.97. Подписано в печать 25.11.13
Формат бумаги 60x84 $^{1/16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,9. Уч.-изд. л. 2,5.
Тираж 100 экз. Заказ 201

Тульский государственный университет
300012, г.Тула, просп. Ленина, 92

Отпечатано в Издательстве ТулГУ
300012, г.Тула, просп. Ленина, 95