ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Вектором называется количественная характеристика, имеющая не только числовую величину, но и направление. Иногда говорят, что вектор это направленный отрезок.

Векторная система обозначений имеет два существенных преимущества.

1. Формулировки физических законов в векторной форме не зависят от выбора осей координат. Векторная система обозначений представляет собой такой язык, в котором формулировки имеют физическое содержание даже без введения системы координат.

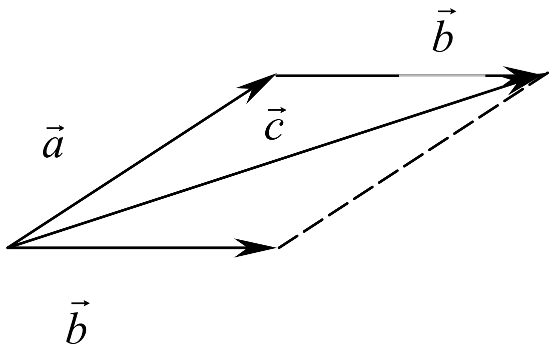
2. Векторная система обозначений является компактной. Многие физические законы выражаются через векторные величины.

Определим основные операции, которые можно производить с векторами.

Равенство двух векторов

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если они имеют одинаковую абсолютную величину и одинаковое направление. Можно сравнивать два вектора, определенные в разных точках пространства и в разные моменты времени. Параллельный перенос не меняет значения вектора.

Сложение векторов



Суммой двух векторов называют вектор $\vec{c}$, проведенный из начальной точки вектора $\vec{a}$ к конечной точке вектора $\vec{b}$, если вектор $\vec{b}$ перенести параллельно самому себе так, чтобы его начало совпадало с концом вектора $\vec{a}$. Причем $\vec{c}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$, если совместить начало векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$, то вектор $\vec{c}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}$ и $\vec{a}$ как на его сторонах и выходящий из общего начала. Сумма векторов не зависит от порядка, в котором складываются векторы.

Умножение вектора на скаляр

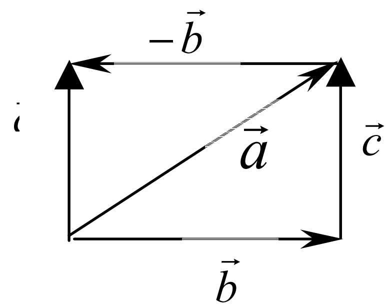
Произведением вектора $\vec{a}$ на число d называется вектор $\vec{c}$, длина которого равна длине первого вектора, умноженной на модуль числа, а направление либо совпадает с начальным вектором, либо противоположно.

$\vec{c} = d \cdot \vec{a}$ $\quad |\vec{c}| = |d| \cdot |\vec{a}|$ вектор $\vec{c}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $d > 0$ (положительно) и направлен противоположно если $d < 0$ (отрицательное).

Произведение числа 0 на любой вектор дает нулевой вектор, который по сути таковым не является ибо он не имеет длины она равна “нулю” и не имеет направления в пространстве. Сумма двух векторов равна нулю тогда и только тогда, когда они равны по модулю и противоположны по направлению. Если k – число, то $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$ т. е. умножение вектора на скаляр дистрибутивно.

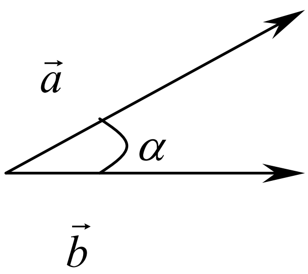
Разность двух векторов

Разность двух векторов $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ можно рассматривать как сумму векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$. Или является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}$ и $\vec{a}$ как на его сторонах и выходящий из конца вычитаемого вектора в начало уменьшаемого.



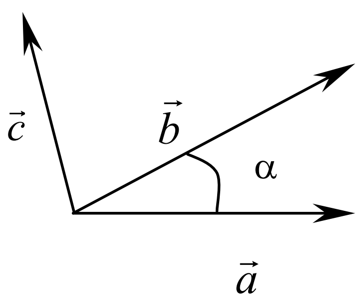
Произведение векторов

Известны два вида произведений двух векторов, широко используемые в физике. Для обоих видов произведений векторов выполняется распределительный (дистрибутивный) закон умножения: произведение вектора $\vec{c}$ на сумму $\vec{a} + \vec{b}$ равно сумме произведений $\vec{c}$ на $\vec{a}$ и $\vec{c}$ на $\vec{b}$. одно из этих произведений представляет собой скаляр, другое вектор.



Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. $c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$, скалярное произведение коммутативно: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.



Векторное произведение

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c}$ лежащий в плоскости, перпендикулярной плоскости в которой расположены вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Модуль вектора равен произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними $a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$ направление вектора $\vec{c}$ определяется правилом правой руки (правого винта) от первого вектора ко второму. Векторное произведение не коммутативно $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Векторы в декартовой системе координат

Выражение физических законов в векторной форме отличается изяществом и лаконичностью. Однако бывает полезно перейти от векторов к определенным системам координат, из которых наиболее удобной является прямоугольная декартовая система координат.

Декартова система координат определяется заданием любой правой тройки взаимно перпендикулярных единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Направление вектора $\vec{k}$ определяется правилом правого винта, т. е. $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$.

Любой вектор $\vec{a}$ можно выразить так:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Здесь a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\vec{a}$ на соответствующие координатные оси:

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{i}\ ,\ a_y = \vec{a} \cdot \vec{j}\ ,\ a_z = \vec{a} \cdot \vec{k}\ .$$

Любой вектор считается заданным тройкой чисел (a_x, a_y, a_z) в данной системе координат.

Найдем скалярное произведение двух векторов в декартовой системе координат, воспользовавшись естественными равенствами:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1,\ \vec{j} \cdot \vec{j} = 1,\ \vec{k} \cdot \vec{k} = 1,\ \vec{i} \cdot \vec{j} = 0,\ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0,\ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0\ .$$

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Для квадрата вектора $\vec{a}$ имеем

$$\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\ .$$

Векторное произведение единичных векторов равно:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}\ ,$$

поэтому векторное произведение двух векторов равно:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$
$$= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$$

Эквивалентная запись векторного произведения через определитель:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

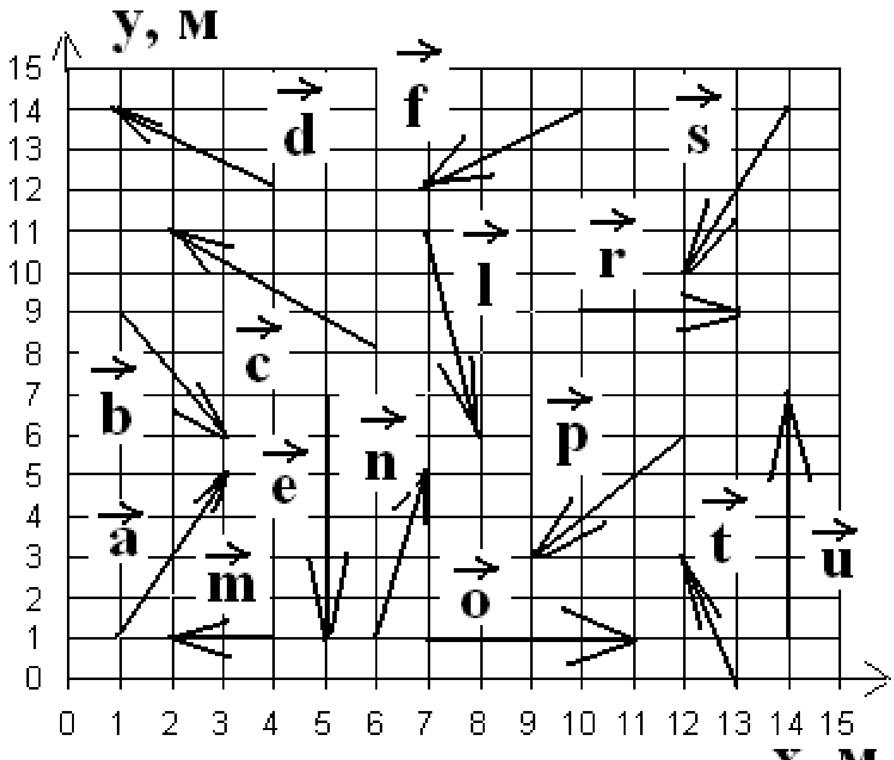


Рис. 1

1.1 Определите проекции на оси OX и OY векторов представленных на рисунке 1.

Пример: $a_x = 2м$; $a_y = 3м$

1.2 Запишите векторы представленные на рисунке 1 в декартовой системе координат (через единичные орты осей OX и OY $\vec{i}$ и $\vec{j}$).

Пример: $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$

1.3 Найдите сумму векторов с рисунка 1 графически и аналитически:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}+\vec{c}$;в) $\vec{c}+\vec{d}$; г) $\vec{d}+\vec{l}$; д) $\vec{b}+\vec{f}$; е) $\vec{c}+\vec{e}$; ж) $\vec{m}+\vec{o}$;

з) $\vec{p}+\vec{t}$; и) $\vec{e}+\vec{u}$; к) $\vec{r}+\vec{s}$; л) $\vec{m}+\vec{r}$; м) $\vec{n}+\vec{s}$; н) $\vec{u}+\vec{e}$; о) $\vec{f}+\vec{a}$.

Пример:

$$\vec{t}+\vec{n}=(-1\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j})+(1\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j})=(-1+1)\cdot\vec{i}+(3+4)\cdot\vec{j}=0\cdot\vec{i}+7\cdot\vec{j}=7\cdot\vec{j}$$

1.4 Найдите разность векторов с рисунка 1 графически и аналитически:

а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{c}$;в) $\vec{c}-\vec{d}$; г) $\vec{d}-\vec{l}$; д) $\vec{b}-\vec{f}$; е) $\vec{c}-\vec{e}$; ж) $\vec{m}-\vec{o}$;

з) $\vec{p}-\vec{t}$; и) $\vec{e}-\vec{u}$; к) $\vec{r}-\vec{s}$; л) $\vec{m}-\vec{r}$; м) $\vec{n}-\vec{s}$; н) $\vec{u}-\vec{e}$; о) $\vec{f}-\vec{a}$.

Пример:

$$\vec{t}-\vec{n}=(-1\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j})-(1\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j})=(-1-1)\cdot\vec{i}+(3-4)\cdot\vec{j}=-2\cdot\vec{i}-1\cdot\vec{j}$$

1.5 Определите скалярное произведение двух векторов с рисунка 1

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\vec{a}\cdot\vec{c}$;в) $\vec{c}\cdot\vec{d}$; г) $\vec{d}\cdot\vec{l}$; д) $\vec{b}\cdot\vec{f}$; е) $\vec{c}\cdot\vec{e}$; ж) $\vec{m}\cdot\vec{o}$;

з) $\vec{p}\cdot\vec{t}$; и) $\vec{e}\cdot\vec{u}$; к) $\vec{r}\cdot\vec{s}$; л) $\vec{m}\cdot\vec{r}$; м) $\vec{n}\cdot\vec{s}$; н) $\vec{u}\cdot\vec{e}$; о) $\vec{f}\cdot\vec{a}$.

Пример: $\vec{t}\cdot\vec{n}=(-1\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j})\cdot(1\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j})=(-1)\cdot(1)+(3)\cdot(4)=11$

1.6 Определите векторное произведение двух векторов с рисунка 1

а) $\vec{a}\times\vec{b}$; б) $\vec{a}\times\vec{c}$;в) $\vec{c}\times\vec{d}$; г) $\vec{d}\times\vec{l}$; д) $\vec{b}\times\vec{f}$; е) $\vec{c}\times\vec{e}$; ж) $\vec{m}\times\vec{o}$;

з) $\vec{p}\times\vec{t}$; и) $\vec{e}\times\vec{u}$; к) $\vec{r}\times\vec{s}$; л) $\vec{m}\times\vec{r}$; м) $\vec{n}\times\vec{s}$; н) $\vec{u}\times\vec{e}$; о) $\vec{f}\times\vec{a}$.

Пример:

$$\vec{t}\times\vec{n}=(-1\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j})\times(1\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j})=(-1)\cdot(4)\cdot\vec{k}+(3)\cdot(1)\cdot(-\vec{k})=-7\cdot\vec{k}$$

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Если функция f имеет в точке x производную, то существует предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \text{ где } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x), \text{ где } \varepsilon(\Delta x) \to 0 \text{ при } (\Delta x) \to 0$$

Таким образом, $\Delta y = f'(x)\Delta x + 0(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$ (1)

Если ввести обозначение $A = f'(x)$, то равенство (1) можно записать следующим образом:

$$\Delta y = A\Delta x + 0(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0) \tag{2}$$

говорят, что функция f дифференцируема в точке если ее приращение Δy в этой точке можно записать в виде (2), где A – некоторая константа, не зависящая от Δx, но вообще говоря зависящая от x. Если функция f имеет в точке x производную, то она дифференцируема в этой точке ($A = f'(x)$). Верно и обратное утверждение: если функция дифференцируема в точке x, т. е. ее приращение в точке x представимо в виде (2), то она имеет производную в точке x равную A.

Если $A = f'(x) \neq 0$, то приращение функции эквивалентно при $\Delta x \to 0$ первому слагаемому правой части (2) $dy \approx A \cdot \Delta x$ ($\Delta x \to 0$). В этом случае, когда $A \neq 0$, член $A \cdot \Delta x$ называют главным линейным членом приращения. Приближенно, пренебрегая бесконечно малой $0(\Delta x)$ высшего порядка, при малых Δx можно считать Δy равным главному члену.

Главный линейный член приращения называют дифференциалом функции f в точке x (соответствующим приращению Δx независимой переменной x) и обозначают так:

$$dy = df = f'(x)\Delta x .$$

Приращение Δx независимой переменной обозначают dx ($dx = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ для дифференциала функции $y = x$ от x), таким образом дифференциал функции f в точке x записывается так

$$dy = df = f'(x)dx .$$

Отметим очевидные формулы:

$$d(U \pm V) = (U \pm V)' dx = U' dx \pm V' dx = dU \pm dV$$

$$d(UV) = (UV)' dx = (VU' + UV')dx = UdV + VdU$$

$$d\left(\frac{U}{V}\right) = \left(\frac{U}{V}\right)' dx = \frac{VdU - UdV}{V^2}.$$

Производная функции от функции

Пусть задана функция от функции $z = F(x) = f(\varphi(x))$, где $y = \varphi(x)$, $z = f(y)$. При этом функция φ имеет производную в точке x, а функция f имеет производную в точке y. Тогда существует производная от F в точке x, равная:

$$F'(x) = f'(y)\varphi'(x).$$

Таблица производных простейших элементарных функций.

1. $(C)' = 0 \ \left(C = const\right)$
2. $\left(x^a\right)' = a \cdot x^{a-1}$, a – любое число
3. $\left(log_a x\right)' = \dfrac{1}{x} log_a e$, в частности $\left(ln\, x\right)' = \dfrac{1}{x}$
4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, в частности, при $a = e$: $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $\left(sin\, x\right)' = cos\, x$
6. $\left(cos\, x\right)' = -sin\, x$
7. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{cos^2 x}$
8. $\left(ctgx\right)' = \dfrac{-1}{sin^2 x}$
9. $\left(arcsin\, x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
10. $\left(arccos\, x\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

11. $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$

12. $\left(arcctgx\right)' = \frac{-1}{1+x^2}$

Производные и дифференциалы высшего порядка

Производная от функции f есть снова функция. Поэтому можно попытаться взять от нее производную. Полученная функция (если она существует, то называется второй производной от $f(x)$ и обозначается через $f''(x)$. Таким образом, $f''(x) = (f'(x))'$.

По индукции, производная $f^n(x)$ порядка *n* определяется как первая производная от производной $f^{n-1}(x)$ порядка (*n* – 1): $f^n(x) = (f^{n-1}(x))'$.

Дифференциал от функции f $dy = f'(x)dx$ мы будем называть первым дифференциалом от f в точке x, соответствующим дифференциалу (приращению) независимой переменной $dx = \Delta x$.

Диффереціал *n*-го порядка от функции f в точке x, соответствующий дифференциалу независимой переменной $dx = \Delta x$ определяется по индукции:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{n-1}(x)dx^{n-1}) = f^n dx^n .$$

Из этого равенства следует, что *n*-я производная от f в точке x, есть отношение $f^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$.

Первообразная. Неопределенный интеграл

Пусть на интервале (*a*, *b*) задана непрерывная функция f. По определению функция F называется первообразной функцией для f на интервале (*a, b*), если на нем производная от F равна f:

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (a,b))$$

Очевидно, что если функция $F(x)$ - первообразная для f на (*a,b*), а C – некоторая постоянная, то функция $F_1(x) = F(x) + C$ есть также первообразная для f, потому, что

$$F_1'(x) = (F(x)+C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$$

Если F какая-либо первообразная от f на интервале (a, b), то возможные первообразные от f на этом интервале выражаются формулой $F(x)+C$, где вместо C можно подставить любое число.

Неопределенным интегралом от непрерывной функции f на интервале (a, b) называется произвольная ее первообразная функция. Неопределенный интеграл обозначается так:

$$\int f(x)dx \text{ и равен } = F(x)+C\ .$$

Если f_1, f_2 – непрерывные на интервале (a, b) функции и A_1, и A_2 – постоянные, то имеет место следующее равенство, выражающее основное свойство неопределенного интеграла:

$\int (A_1 f_1 + A_2 f_2)dx = A_1\int f_1 dx + A_2\int f_2 dx + C$, где C – некоторая постоянная.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int 0\cdot dx = C$;
2. $\int A\cdot dx = A\cdot x + C,\quad A = const$;
3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\quad \alpha \neq -1$;
4. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$;
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\,a} + C\ \ (0 < a \neq 1)$ в частности $\int e^x dx = e^x + C$;
6. $\int sin\,xdx = -cos\,x + C$;
7. $\int cos\,xdx = sin\,x + C$;
8. $\int \dfrac{dx}{cos^2 x} = \int(1 + tg^2 x)dx = tgx + C\quad (x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi,$ где $n = 0, \pm1, \ldots)$;
9. $\int \dfrac{dx}{sin^2 x} = \int(1 + ctg^2 x)dx = -ctgx + C\quad (x \neq n\pi,$ где $n = 0, \pm1, \ldots)$;
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} arcsin\,x + C \\ -arccos\,x + C \end{cases}\quad (-1 < x < 1)$;

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C, \\ -arcctgx + C; \end{cases}$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$ где $|x| > 1$;

14. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \quad (|x| \neq 1)$.

Понятие определенного интеграла.
Площадь криволинейной фигуры

Зададим на отрезке $[a,b]$ (a и b – конечные числа) неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$. Изобразим ее график и определим понятие площади фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x, прямыми $x = a$ и $x = b$ и вычислим эту площадь. Проведем разбиение отрезка $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, выберем на каждом из полученных отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ (j = 0, 1, …, n–1) по произвольной точке $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ определим значения $f(\xi_j)$ функции в этих точках и составим сумму: $S_n = \sum\limits_0^{n-1} f(\xi_j)\Delta x \ (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j)$ которую называют интегральной суммой и которая равна сумме площадей прямоугольников. Будем теперь стремить все Δx_j к нулю, причем так, чтобы максимальный (самый большой) частичный отрезок разбиения стремиться к нулю. Если при этом величина S_n стремиться к определенному пределу S, не зависящему от способов разбиения и выбора точек ξ_j. Тогда величину S назовем площадью нашей криволинейной фигуры. Т. о.:

$$S_{max} = \lim_{\Delta x_j \to 0} \sum_0^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j .$$

Отвлекаясь от операции нахождения площади, будем рассматривать эту операцию как нахождение некоторого числа S по данной функции f, заданной на отрезке $[a,b]$: $S = \lim\limits_{max\,\Delta x_j \to 0} \sum\limits_0^{m-1} f(\xi_j)\Delta x_j = \int\limits_a^в f(x)dx$.

Определенным интегралом от функции на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральной суммы, когда максимальный частичный отрезок разбиения стремиться к нулю.

Пусть задана непрерывная на $[a,b]$ функция $f(x)$ и пусть $F(x)$ есть ее первообразная. Теорема Ньютона-Лейбница утверждает справедливость следующего равенства: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Основные методы интегрирования

1. Интегрирование заменой переменной (подстановкой)

Пусть функция $t = \varphi(x)$ определена и дифференцируема на некотором множестве $\{x\}$, и пусть $\{t\}$ множество всех значений этой функции. Пусть далее для функции $g(t)$ существует на множестве $\{t\}$ первообразная функция $G(t)$, т. е. $\int g(t)dt = G(t) + C$. Тогда всюду на множестве $\{x\}$ для функции $g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ существует первообразная функция, равная $G[\varphi(x)]$, т. е.

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = G[\varphi(x)] + C .$$

Пусть нам требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$ и можно выбрать в качестве новой переменной функцию $t = \varphi(x)$ так, что $f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x)$, причем $g(t)$ легко интегрируется т.е.:

$\int g(t)dt = G(t) + C$ и $\int f(x)dx = G[\varphi(x)] + C$ – этот прием вычисления называется интегрированием путем замены переменной.

2. Интегрирование по частям

Пусть каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируема на множестве $\{x\}$ и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции $v(x)u'(x)$. Тогда на множестве $\{x\}$ существует первообразная и для функции $u(x)v'(x)$, причем справедлива формула

$$\int u(x)\underbrace{v'(x)dx}_{dv} = u(x)v(x) - \int v(x)\underbrace{u'(x)dx}_{du} .$$