

ДИНАМИКА ЧАСТИЦЫ. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Динамика – это раздел механики, который изучает движение тел в связи с теми причинами (взаимодействиями между телами), которые обуславливают тот или иной характер движения.

Иными словами, динамика изучает вопрос «почему тело движется именно так?»

2.1. Сила, масса, импульс

Сила – это мера взаимодействия тел, в результате которого тела деформируются или приобретают ускорение. Сила – это вектор.

Если к материальной точке (частице) приложено несколько сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$, их действие можно заменить действием одной силы \vec{F} , которая является равнодействующей данных сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i .$$

Виды сил в механике:

1) Гравитационная сила.

Все тела в природе взаимно притягивают друг друга. Закон, которому подчиняется это притяжение, был установлен Ньютоном, и носит название закона всемирного тяготения:

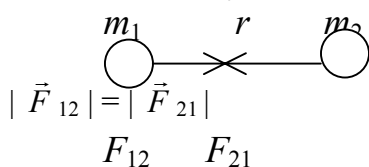
• *сила, с которой два тела притягивают друг друга, пропорциональна массам этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними*

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2} .$$

Здесь F – гравитационная сила,

G – гравитационная постоянная, $G = 6,670 \cdot 10^{-11}$ (м³/кг · с²).

Направлена гравитационная сила вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела.



2) Сила тяжести – это сила притяжения частицы планетой.

$$\vec{F}_m = m \vec{g} ,$$

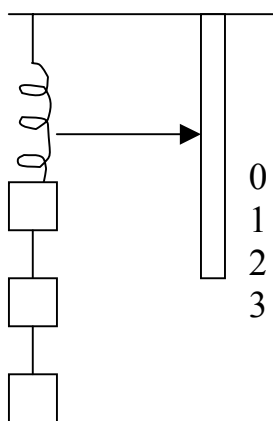
где \vec{g} – ускорение свободного падения, $g = 9,8$ м/с². Это ускорение, с которым все тела падают на Землю под действием силы притяжения (к Земле).

3) Вес тела – это сила, с которой тело действует на (неподвижные) подвес или опору, удерживающую его от свободного падения.

Условие, чтобы подвес (или опора) были неподвижны, весьма существенно.

4) Сила упругости.

Рассмотрим следующий эксперимент. Возьмем пружину, закрепленную неподвижно в верхнем конце. К нижнему концу пружины подвесим какой-либо груз. Под воздействием этого груза (и того тела, к которому прикреплен верхний конец пружины) она получит некоторое удлинение, в результате чего указатель, прикрепленный к пружине, сместится по неподвижной шкале от отметки 0 до отметки 1. Подберем несколько грузов, одинаковых в том



отношении, что каждый из них, взятый в отдельности, вызывает одинаковое удлинение пружины. Тогда можно утверждать, что каждый из этих грузов, будучи подвешен к пружине, оказывает на нее одинаковое воздействие, которое можно охарактеризовать как действие на конец пружины силы определенной величины.

Теперь подвесим к пружине сразу два таких груза. Каждый из них оказывает воздействие, одинаковое не только по величине, но и по направлению. В этом случае сила, действующая на пружину, будет в два раза больше. Как показывает опыт, и удлинение пружины будет в два раза больше. Три равных груза оказывают при одновременном воздействии утроенную деформацию пружины и т.д.

Следовательно, удлинение пружины пропорционально действующей на нее силе – закон Гука:

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

Здесь \vec{F} , – сила упругости, \vec{x} – смещение, k – коэффициент упругости пружины.

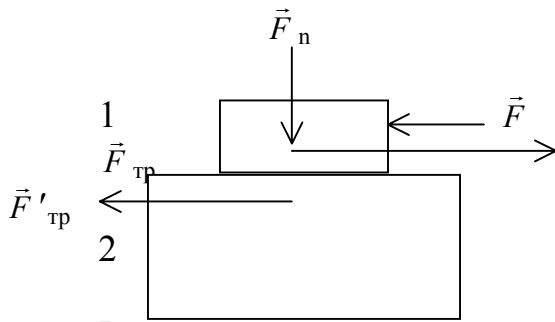
5) Сила трения.

Силы трения появляются при перемещении соприкасающихся тел или их частей друг относительно друга. Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется внешним. Трение между частями одного и того же сплошного тела (например, жидкости или газа) носит название внутреннего трения.

Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки (смазки) между ними, называется сухим. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется вязким.

Силы трения направлены по касательной к трущимся поверхностям (или слоям), причем так, что они противодействуют относительному смещению этих поверхностей (слоев).

Виды сухого трения: трение покоя, скольжения, качения.



Рассмотрим два соприкасающихся тела 1 и 2, из которых последнее закреплено неподвижно. Тело 1 прижимается к телу 2 с силой \vec{F}_n , направленной по нормали к поверхности соприкосновения тел. Она называется силой нормального давления и может быть обусловлена весом тела или другими причинами. Попытаемся переместить тело 1, подействовав на него внешней силой \vec{F} . При этом обнаруживается, что для каждой конкретной пары тел и каждого значения силы \vec{F}_n имеется определенное минимальное значение F_0 силы \vec{F} , при котором тело 1 удастся сдвинуть с места. При значениях внешней силы, заключенных в пределах $0 < F < F_0$ тело остается в покое. По второму закону Ньютона (см. ниже) это возможно, если сила \vec{F} уравновешивается равной силой, которая и есть сила трения $\vec{F}_{тр}$. F_0 – наибольшее значение силы трения покоя.

Отметим, что на тело 2 также действует сила трения $\vec{F}'_{тр} = -\vec{F}_{тр}$.

Если внешняя сила \vec{F} превзойдет по величине \vec{F}_0 , тело начнет скользить, т.е. появляется трение скольжения. С увеличением скорости она вначале несколько убывает, причем так, что при $V \rightarrow 0$ ее величина стремится к \vec{F}_0 . При дальнейшем увеличении V она начнет возрастать.

В случаях, когда состояние и природа поверхностей не изменяются (изменение поверхностей может происходить за счет сглаживания шероховатостей при скольжении, окисления поверхностей из-за нагрева и т.п.), сила трения скольжения оказывается практически не зависящей от скорости и равной \vec{F}_0 .

Законы сухого трения сводятся к следующему:

• максимальная сила трения покоя, а также сила трения скольжения не зависит от величины поверхности соприкосновения трущихся тел и оказываются приблизительно пропорциональными величине силы нормального \vec{F}_n , прижимающей трущиеся поверхности друг к другу:

$$F_{тр} = kF_n$$

k – коэффициент трения (покоя или скольжения соответственно). Он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей, от их шероховатости. В случае скольжения $k = f(V)$.

Примеры полезности (гололедица) и вредности (подшипники) сил трения.

Наиболее радикальным способом уменьшения трения скольжения является замена скольжения качением, которое возникает, например, между цилиндрическим или шарообразным телом, катящимся по плоской или

изогнутой поверхности. Трение качения формально подчиняется тем же законам, что и трение скольжения, но коэффициент трения в этом случае оказывается значительно меньшим.

В отличие от сухого вязкое трение характерно тем, что сила вязкого трения обращается в нуль одновременно со скоростью. Рассмотрим силы трения между твердым телом и вязкой (жидкой или газообразной) средой. Следует иметь в виду, что помимо собственно сил трения, при движении тел в жидкой или газообразной среде возникают силы сопротивления среды, которые могут быть гораздо значительнее, чем силы трения. Ограничимся пока изложением закономерностей, которым подчиняются силы трения и сопротивления среды совместно, причем условно будем называть суммарную силу силой трения. Вот вкратце эти закономерности.

Величина силы трения зависит от формы и размеров тела, состояния его поверхности, скорости по отношению к среде и от свойства среды, называемого вязкостью. При сравнительно небольших скоростях:

$$\vec{F}_{mp} = -k_1 \vec{V}.$$

При больших скоростях линейный закон переходит в квадратичный:

$$\vec{F}_{mp} = -k_2 v^2 \frac{\vec{V}}{v}.$$

Здесь k_1 и k_2 – коэффициенты трения, в сильной степени зависящие от формы и размеров тела, состояния его поверхности и от вязких свойств среды.

Определим теперь другие динамические характеристики.

1) Свойство инертности – свойство тела противиться попыткам изменить его движение. Количественная мера такого свойства – это масса.

Масса фигурирует в двух различных законах динамики: во втором законе Ньютона и в законе всемирного тяготения. В первом случае она характеризует инертные свойства тела, во втором – гравитационные, т.е. способность тел притягивать друг друга. Не следует ли различать инертную и гравитационную массы? Ответ на этот вопрос может дать только опыт. И из опыта следует, что инертная и гравитационная массы всех тел строго пропорциональны друг другу. Это означает, что при надлежащем выборе единиц измерения гравитационная и инертная массы становятся тождественными. Принцип эквивалентности:

$$m_{\text{грав}} = m_{\text{инерт}}.$$

Поэтому в физике говорят просто о массе.

2) Еще одна динамическая характеристика – это импульс тела:

$$\vec{p} = m\vec{V}$$

2.2. Первый закон Ньютона

• *Существуют такие системы отсчета, относительно которых поступательно движущиеся тела сохраняют свою скорость*

постоянной, если действие на них сил скомпенсировано. Это инерциальные системы отсчета (ИСО).

Современная формулировка первого закона Ньютона:

• существуют такие системы отсчета, в которых свободная частица (на которую не действуют никакие силы) движется неускоренно (т.е. прямолинейно и равномерно). Такие СО называются инерциальными, а движение свободной частицы в них – движением по инерции.

ИСО существует бесконечное множество. Любая СО, движущаяся относительно некоторой ИСО прямолинейно и равномерно, является инерциальной, что вытекает из правила сложения скоростей. Опытным путем установлено, что СО, центр которой совмещен с Солнцем, а оси направлены на соответствующие звезды, является инерциальной. Эта система называется гелиоцентрической (гелиос – греч. – Солнце). Любая СО, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно гелиоцентрической системы, будет инерциальной.

Земля движется относительно Солнца и звезд по криволинейной траектории, имеющей форму эллипса. Криволинейное движение всегда происходит с некоторым ускорением. Кроме того, Земля совершает вращение вокруг своей оси. Таким образом, СО, связанная с земной поверхностью, движется с ускорением относительно гелиоцентрической СО и не является инерциальной. Однако ее ускорение настолько мало, что в большом числе случаев ее можно считать практически инерциальной.

2.3. Преобразование координат Галилея

Рассмотрим две СО: инерциальную K и систему K' , которая движется относительно K с постоянной скоростью \vec{V}_0 . Будем считать, что в начальный момент времени $t=0$ начало координат системы K (т. O) находится на удалении \vec{r}_0 от начала координат O системы K' . Тогда радиус-векторы любой частицы массы m в моменты времени t и t' в системах K и K' связаны соотношениями

$$\vec{r}(t') = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 - \vec{V}_0 t, \quad t = t'.$$

• Последнее преобразование ниоткуда не следует, а вводится как постулат классической механики: время абсолютно, т.е. не зависит от состояния движения и течет одинаково во всех СО. Пространство в классической механике также абсолютно.

Преобразования Галилея в координатной форме:

$$x' = x - v_0 t; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t \quad (V_0 \text{ направлено вдоль оси } x)$$

после дифференцирования по времени получим классическую формулу сложения скоростей:

$$\vec{V}'(t) = \vec{V}(t) - \vec{V}_0$$

или, как она была записана в кинематике:

$$\vec{V}_a(t) = \vec{V}_o + \vec{V}_n$$

После повторного дифференцирования получим:

$$\vec{a}' = \vec{a} \Rightarrow$$

- **Все ИСО движутся друг относительно друга с постоянными скоростями.**

2.4. Второй и третий законы Ньютона

- **Скорость изменения импульса частицы в ИСО равна результирующей силе, действующей на частицу:**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{рез} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Следует иметь в виду, что второй закон Ньютона не является определением силы, он только устанавливает связь между кинематическими и динамическими величинами, позволяет найти траекторию частицы. Поэтому его называют уравнением движения частицы.

Т.к. $m = const$, $\vec{p} = m\vec{V} \Rightarrow \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$

- **Опыты показывают, что законы классической механики, а также следствия преобразований Галилея справедливы только для частиц или тел с достаточно большими массами, много большими масс атомов, которые движутся с малыми скоростями (по сравнению со скоростью света).**

- **Уравнения движения классической динамики одинаковы во всех ИСО, т.е. все ИСО эквивалентны (равноправны) по отношению к механическим явлениям.**

- **Третий закон Ньютона: силы взаимодействия двух частиц равны по величине, противоположны по направлению и направлены по прямой, соединяющей частицы:**

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}.$$

2.5. Неинерциальные СО. Силы инерции

НИСО – это любая система, которая движется с ускорением относительно ИСО.

Примеры: вращающаяся Земля, трогаящийся с места или тормозящий автомобиль и т.д.

Силы инерции:

- 1) Сила инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0$, возникающая при поступательном движении СО с ускорением \vec{a}_0 .
- 2) Кориолисова сила инерции $\vec{F}_{кор} = 2m[\vec{V}', \vec{\omega}]$, действующая только на движущиеся частицы.
- 3) Центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб} = m[\vec{\omega}, [\vec{r}, \vec{\omega}]] = m\omega^2 R$. Она действует как на движущиеся, так и на неподвижные частицы.

Силы инерции отличаются от «обычных» сил тем, что они обусловлены не взаимодействием тел, а ускоренным движением СО, они существуют только в НИСО и направлены противоположно ускорению системы. Но с другой стороны, независимо от массы тел, всем им они сообщают одинаковое ускорение.

Уравнение движения в НИСО:

$$\frac{d\vec{p}'}{dt} = m\vec{a}' = \sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{кор} + \vec{F}_{цб}.$$

Примеры действия сил инерции.

3. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

3.1. Момент импульса частицы

Момент импульса частицы, движущейся по некоторой траектории и имеющей в данный момент времени радиус вектор \vec{r} и импульс $\vec{p} = m\vec{V}$, относительно точки (центра) О, называется векторное произведение радиус-вектора на импульс частицы:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}].$$

Направление \vec{L} определяется правилом правого винта.

Векторное произведение любых векторов определяется следующим правилом:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i}(yp_z - zp_y) + \vec{j}(zp_x - xp_z) + \vec{k}(xp_y - yp_x).$$

3.2. Закон изменения момента импульса. Момент силы

Чтобы найти закон изменения момента импульса, нужно продифференцировать по времени выражение $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] \Rightarrow$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{V}, \vec{p}] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right]$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}$$

Вектор \vec{M} – момент силы.

• **Скорость изменения момента импульса частицы относительно некоторой точки равна моменту силы относительно той же точки.**

Вектор \vec{M} перпендикулярен \vec{r} и \vec{F} и образует с ними (как и \vec{L} с \vec{r} и \vec{p}) правую тройку векторов.

$$|\vec{M}| = rF \sin \alpha = lF$$

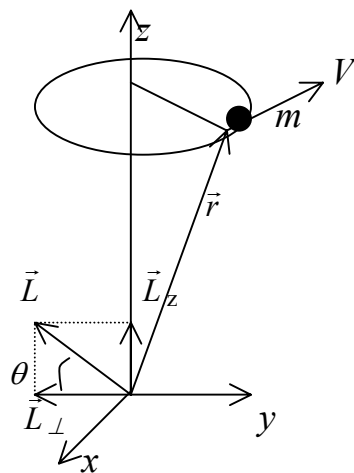
$$l = r \sin \alpha$$

где l – кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы – плечо силы.

3.3. Момент импульса относительно оси

Проекция вектора момента импульса на некоторую фиксированную (закрепленную) ось, например ось z , называется моментом импульса относительно оси.

Пусть частица массы m движется по окружности радиуса R вокруг этой оси. Из рисунка видно, что



$$L_z = L \sin \theta = mvr \sin 90^\circ \sin \theta = mvr$$

$$v = \omega R \quad \Rightarrow \quad L_z = mR^2 \omega$$

$$I = mR^2$$

I – момент инерции частицы.

Окончательно: $L_z = I\omega$, то есть

- **Момент импульса частицы относительно оси равен произведению ее момента инерции на угловую скорость ее вращения.**

Закон изменения момента импульса относительно оси:

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = M_z,$$

M_z – проекция момента силы на ось z .

3.4. Законы изменения и сохранения импульса относительно оси

Здесь будем изучать не одну частицу, а систему частиц. Ее можно всегда разбить на малые участки с массами m_i , так что их размерами можно пренебречь и рассматривать эти участка как частицы (материальные точки). Положение частиц характеризуется (задается) радиус-векторами \vec{r}_i ; общая масса системы $m = \sum_i m_i \Leftrightarrow m = \int_V \rho dV$, dV – объем малого участка, ρ – плотность системы (тела).

Пусть \vec{F}_i – внешние силы, которые действуют на i -тую частицу системы со стороны окружающих эту систему тел или полей;

$\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$ – сумма внутренних сил, которые действуют на i -тую частицу со стороны всех остальных частиц системы.

Таким образом, получим закон движения i -той частицы:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}.$$

Просуммируем эти уравнения для всех частиц системы и учтем, что в силу третьего закона Ньютона

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \text{ и поэтому } \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{p}_i \right) = \sum_i \vec{F}_i, \text{ где}$$

$$\sum_i \vec{p}_i - \text{полный импульс системы} \equiv \sum_i m_i \vec{V}_i = \vec{P}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{внешн}} - \text{результатирующая внешних сил} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{внешн}}$$

То есть, **производная по времени полного импульса системы частиц равна результирующей внешних сил (включая силы инерции в НИСО).**

$\vec{F}dt$ – импульс силы. Интегрируем:

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \Delta \vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{внешн}} dt$$

Таким образом, *изменение (приращение) полного импульса системы за время $\Delta t = t_2 - t_1$ равно импульсу внешних сил за то же время.*

Если все внешние силы, действующие на систему, уравновешиваются ($\vec{F}_{\text{внешн}} = 0$), то системы называется замкнутой. Тогда $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ или $\vec{P} = \text{const} \Rightarrow$ Закон сохранения импульса: полный импульс замкнутой системы сохраняется.

Если, например, $\vec{F}_{\text{внешн}} \neq 0$, $F_{\text{внешн},x} = 0 \Rightarrow P_x = \text{const}$, то есть, сохраняется только проекция импульса на соответствующую ось.

3.5. Центр масс. Уравнение движения центра масс

Центр масс системы – это точка с радиус-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m},$$

где сумма берется по всем частицам системы.

Для непрерывного распределения массы имеем:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \int_V \rho \vec{r} dV \Rightarrow \text{декартовы координаты центра масс:}$$

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

Возьмем производную от \vec{r}_C по времени и получим:

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} \equiv \vec{V}_C = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{m} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{V}_i = \frac{1}{m} \sum_i \vec{p}_i \quad \text{или}$$

$$m \vec{V}_C = \sum_i m_i \vec{V}_i = \vec{P} \Rightarrow$$

• **Полный импульс системы равен произведению ее массы на скорость центра масс \vec{V}_C .**

Подставим это выражение в закон изменения полного импульса, получим:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \vec{V}_C) = m \vec{a}_C = \vec{F}_{\text{внешн}} \Rightarrow$$

• **Центр масс системы движется как частица, в которой сосредоточена вся масса системы и которой приложена результирующая внешних сил.**

И последнее:

• **При поступательном движении все точки твердого тела движутся так же, как и центр масс (по таким же траекториям), поэтому для описания поступательного движения достаточно записать и решить уравнение движения центра масс.**

3.6. Реактивное движение. Уравнение Мещерского

Реактивное движение – такое движение тела, при котором его масса изменяется.

Уравнение Мещерского описывает движение любого тела с переменной массой в поле внешних сил с результирующей силой $\vec{F}_{\text{внешн}}$:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_{\text{реакт}} + \frac{dm}{dt} \vec{u}.$$

Здесь \vec{V} – скорость движения, например, ракеты и ИСО K' , которая называется сопутствующей, так как ракета в ней покоится.

Второе слагаемое в уравнении Мещерского называется реактивной силой:

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = \frac{dm}{dt} \vec{u},$$

\vec{u} – скорость, с которой тело массы m присоединяет (поглощает) или отбрасывает (испускает) массу dm относительно тела.

3.7. Момент импульса системы. Уравнение моментов

Момент импульса системы – это аддитивная величина, равная векторной сумме моментов импульса всех частиц системы:

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i].$$

Закон изменения момента импульса для i -той частицы:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i + \sum_{j \neq i} \vec{M}_{ij},$$

где \vec{M}_i – момент внешних сил; второе слагаемое – сумма моментов внутренних сил.

Просуммируем по всем частицам:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{M}_{ij}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{M}_{ij} = 0, \quad \text{так как содержит парные слагаемые вида}$$

$$[\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{F}_{ji}] = [\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{F}_{ij}] = 0, \quad \text{так как вектор } (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \text{ параллелен вектору } \vec{F}_{ij}$$

Получаем уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}_{\text{внешн}},$$

то есть,

• ***Производная по времени полного момента импульса системы частиц равна результирующему моменту внешних сил.***

3.8. Закон сохранения момента импульса

Как следует из уравнения моментов,

- **Полный момент импульса системы сохраняется, если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю:**

$$\frac{d\vec{L}_{сист}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{сист} = const .$$

Поскольку $\vec{L}_{сист}$ – вектор, то может сохраняться не сам вектор момента импульса, а его проекция (или две проекции). Например:

$$\sum_i M_{iz} = 0 \Rightarrow \sum_i L_{iz} = const .$$