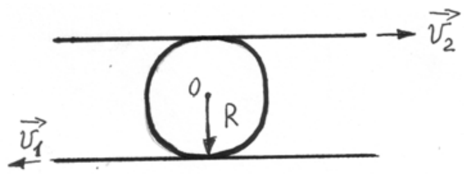
Тульский государственный университет.
Олимпиада по физике 12 февраля 2006 г.




1. Цилиндр радиуса R = 2 см зажат между двумя горизонтальными поверхностями, которые движутся в разные стороны со скоростями $v_2$ = 4 м/с и $v_1$ = 3 м/с. Найти угловую скорость вращения ω цилиндра вокруг своей оси O, если он не проскальзывает относительно поверхностей. (4 балла)

Решение:

Центр цилиндра движется со скоростью $v_C$ вправо. Перейдем в Ц-систему отсчета, связанной с центром масс. В Ц-системе центр цилиндра покоится, нижняя и верхняя точки движутся со скоростями

$$v_{1отн} = v_1 + v_C \text{ (влево)}$$
$$v_{2отн} = v_2 - v_C \text{ (вправо)}$$

Но в Ц-системе цилиндр вращается, и все его точки на ободе имеют одинаковую по величине скорость. Таким образом $v_{1отн} = v_{2отн}$, или

$$v_1 + v_C = v_2 - v_C$$

Отсюда следует, что

$$v_C = (v_2 - v_1)/2$$
$$v_{1отн} = v_1 + v_C = v_1 + (v_2 - v_1)/2 = (v_2 + v_1)/2$$

Угловая скорость вращения цилиндра связана с линейной скоростью точки на ободе

$$\omega = v_{1отн}/R = (v_2 + v_1)/(2R) = (4 + 3)/0{,}04 = 175 \text{ рад/с}$$

Ответ: ω = 175 рад/с

2. Тело массы m = 3 кг положили на плоскую поверхность, наклоненную под углом α = 30° к горизонту. Коэффициент трения μ = 0,6. Приняв g = 10 м/с$^2$, найти величину силы трения, действующего на тело со стороны поверхности. (3 балла)

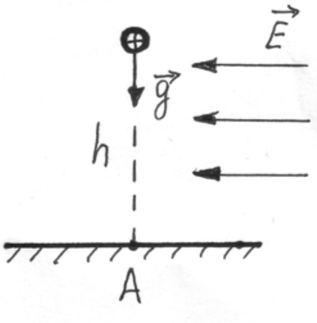
Решение:

Максимальная сила трения скольжения между телом и наклонной плоскостью равна

$$F_{max\ тр.ск.} = \mu N = \mu mg\cos\alpha = 0{,}6 \cdot 3 \cdot 10 \cdot \sqrt{3}/2 = 15{,}6 \text{ Н}$$

Проекция силы тяжести, стремящаяся сдвинуть тело с наклонной плоскости равна $mg\sin\alpha = 3 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 15$ Н, и, как видно не сможет сдвинуть с места тело. Таким образом тело находится в равновесии, и сила трения равна проекции силы тяжести, т.е. 15 Н.

Ответ: $F_{тр.пок.}$ =15 Н




3. Массивный заряженный шарик удерживают в однородном горизонтальном электрическом поле на высоте h = 12,8 см над точкой A, находящейся на горизонтальном участке земли. Если шарик отпустить без начальной скорости, то он упадет на удалении S = h от точки A. С какой горизонтальной начальной скоростью надо бросить шарик, чтобы он упал в точку A? Принять $g = 10$ м/с$^2$. (6 баллов)

Решение:

На заряд действует горизонтальная электрическая сила, равная

$$F_э = qE = ma_x$$

и вертикальная сила тяжести

$$mg = ma_y.$$

Используя начальные условия $v_{0x} = 0$, $v_{0y} = 0$, $a_y = g$, $a_x = qE/m$, найдем проекцию ускорения на ось X:

$$h = gt^2/2 = S = a_x t^2/2, \text{ значит } a_x = g,\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

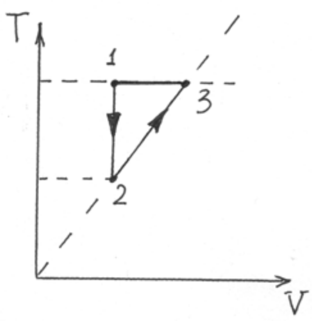
При начальной скорости $v_x = v_0$ перемещение вдоль оси X равно нулю, а время падения остается такой же

$$0 = v_0 t - a_x t^2/2$$

Найдем начальную скорость

$$v_0 = a_x t/2 = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{gh}{2}} = \sqrt{\frac{10\cdot 0{,}128}{2}} = 0{,}8 \text{ м/с}$$

Ответ: 0,8 м/с




4. Два моля азота совершают процессы 1-2-3, изображенные на диаграмме. Какое суммарное тепло $Q_{123}$ (алгебраическая сумма) получает газ за время этих процессов, если при этом его температура меняется на $\Delta T = 100$ К. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль*К) (4 балла)

Решение:

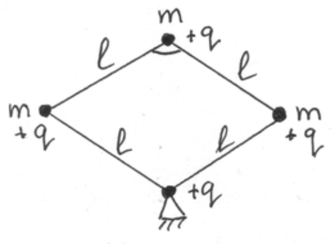
Как видно из рисунка, на участке 1-2 (изохора) тепло отбирается от газа при нулевой работе, а на участке 2-3 (изобара) газ получает тепло.

$$Q_{123} = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{12} + A_{12} + \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{i}{2}\nu R\left(T_2 - T_1\right) + 0 + \frac{i}{2}\nu R\left(T_3 - T_2\right) + p\left(V_3 - V_2\right)$$

Учитывая, что $T_3 = T_1$ и $p\left(V_3 - V_2\right) = \nu R\left(T_3 - T_2\right) = \nu R\Delta T$ получим

$$Q_{123} = \nu R\Delta T = 2\cdot 8{,}31\cdot 100 = 1662 \text{ Дж}$$

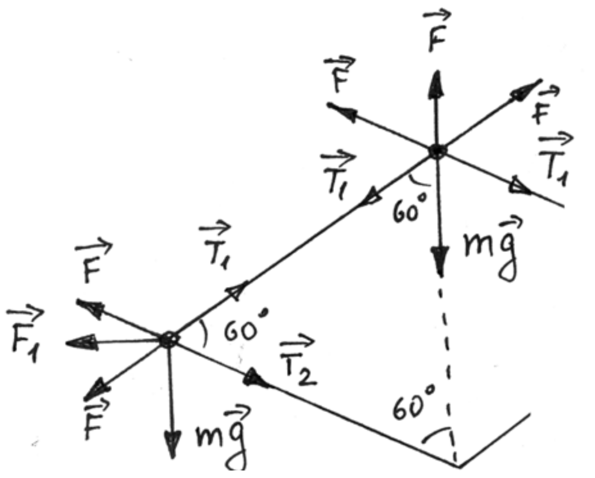
Ответ: 1662 Дж




5. Четыре шарика с одинаковыми зарядами q = $10^{-5}$ Кл и с одинаковыми массами соединены невесомыми нерастяжимыми нитями длины L = 3 м каждая. Нижний шарик закреплен, а остальные образуют в вертикальной плоскости ромб с наибольшим углом 120°. Принимая g = 10 м/с$^2$, найти массу m каждого из шариков. (6 баллав)

Решение:

Выразим величины сил, действующих на верхний и левый шарик:




$$F = \frac{kq^2}{l^2};\; F_1 = \frac{kq^2}{\left(2l\sin 60°\right)} = \frac{kq^2}{3l^2} = \frac{F}{3}$$

Запишем уравнение статики в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

для верхнего шарика:

$$0Y:\quad F + 2F\cos 60° - mg - 2T_1\cos 60° = 0$$

для левого шарика

$$OX:\; (T_1 + T_2)\cos 30° - 2F\cos 30° - \frac{F}{3} = 0$$

$$OY:\; T_1 \sin 30° - T_2 \sin 30° - mg = 0$$

Решая эти уравнения, находим:

$$T_1 = 2F - mg;\qquad T_2 = 2F\left(1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) - T_1 = mg - \frac{2F}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2}\left(T_1 - T_2\right) = mg \;\Rightarrow\; 2F + \frac{2F}{3\sqrt{3}} - 2mg = 2mg \;\Rightarrow\; 4mg = \frac{2F\left(3\sqrt{3}-1\right)}{3\sqrt{3}}$$

$$m = \frac{kq^2\left(3\sqrt{3}-1\right)}{2g3\sqrt{3}\cdot l^2} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-10}\left(3\sqrt{3}-1\right)}{6\cdot 10\cdot\sqrt{3}\cdot 3^2} = 4{,}037 \text{ г}$$

6. Чтобы избежать заноса и не вылететь с трассы, аэросани могут совершить по горизонтальному льду круг радиуса R = 90 м за наименьшее время $\tau$ = 1 мин с постоянной по величине скоростью. Чему равен коэффициент трения саней о лед? Принять g = 10 м/с$^2$. (4 балла)

Решение:

При движении с постоянной скоростью на сани действует центростремительная сила трения, величина которой не может превысить значения силы трения скольжения

$$F \le \mu N = \mu mg$$

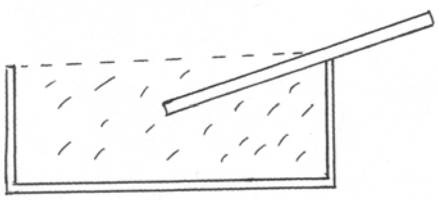
Таким образом, если сани будут ехать с максимально большой скоростью без скольжения, то сила трения достигнет своего максимума. По условию можно найти эту максимальную скорость:

$$v_{\max} = \frac{2\pi R}{\tau} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 90}{60} = 9{,}425\,\text{м/с}$$

Напишем закон Ньтона в проекции на радиальную ось:

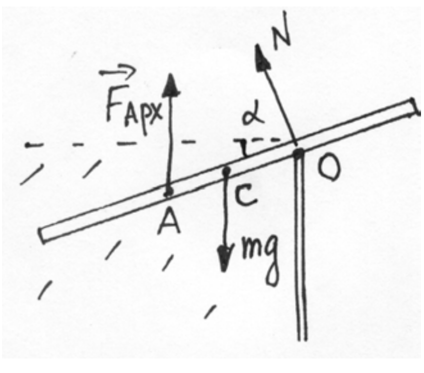
$$\mu mg = m\frac{v_{\max}^2}{R} \;\Rightarrow\; \mu = \frac{v_{\max}^2}{gR} = \frac{(9{,}425)^2}{10\cdot 90} = 0{,}099$$

Ответ: $\mu$= 0,099



7. Тонкая палочка с однородным сечением лежит в равновесии на краю гладкого сосуда, доверху наполненного водой, причем 60% длины палочки погружено в воду. Чему равна плотность материала палочки? Плотностью воздуха пренебречь. (5 баллов)

Решение:



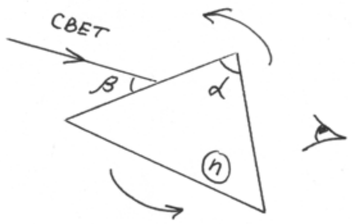

Так как палочка погружена на 60%, то длина отрезка $OC = 0{,}1L$, а отрезка $OA = 0{,}3L$. Напишем уравнение станики для моментов сил:

$$mg\cdot 0{,}1L\cos\alpha - F_{\text{APX}}\cdot 0{,}3L\cos\alpha = 0$$

Из этого уравнения следует:

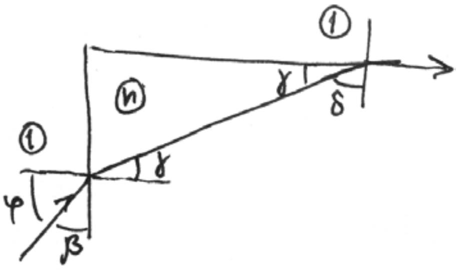
$$F_{apx} = \frac{mg}{3} \;\Rightarrow\; \rho_в gS\cdot 0{,}6L = \frac{\rho gSL}{3} \;\Rightarrow\; \rho = 1{,}8\rho_в = 1800\ \text{кг/м}^3$$

Ответ: 1800 кг/м$^3$.




8. Прозрачную призму с углом $\alpha = 90°$ вращают так, что угол $\beta$ между лучем падающего света и поверхностью призмы растет. При угле $\beta = 30°$ свет перестает проходить сквозь призму к наблюдателю Н. Найти показатель преломления материала призмы. (7 баллов)

Решение:



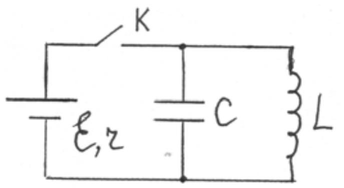

Луч перестает проходить сквозь призму потому, что он испытывает полное внутреннее отражение под углом $\delta$ на второй поверхности при выходе из призмы:

$$\sin\delta = \frac{1}{n}$$

Запишем закон преломления на входе в призму:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} = \frac{\cos\beta}{\sqrt{1-\cos^2\gamma}} = \frac{n}{1} \Rightarrow \cos\beta = n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = \sqrt{n^2-1} \Rightarrow n = \sqrt{1+\cos^2\beta} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1{,}323$$

Ответ: 1,323




9. В схеме, показанной на рисунке С = $2\cdot10^{-12}$ Ф, L = 2 Гн, ЭДС источника тока Е = 200 В, его внутреннее сопротивление $r$ = 2 Ом. В начальный момент времени t = 0 ключ К размыкают. Найти величину заряда на конденсаторе в момент времени $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$. (5 баллов)

Решение:

До размыкания ключа К в цепи через источник и катушку индуктивности течет постоянный ток, равный

$$I = \frac{E}{r}.$$

Так как катушка не имеет активного сопротивления, то на ней нет падения напряжения, и, следовательно, конденсатор не заряжен, т.е.

$$q = 0$$

После размыкания цепи в контуре возникнут незатухающие колебания заряда с циклической частотой $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ по гармоническому закону

$$q = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Из начальных условий найдем амплитуду и начальную фазу:

$$q = 0 = A\sin\varphi_0$$

$$I = \frac{E}{r} = A\omega\cos\varphi_0$$

Видно, что $\varphi_0 = 0$, $A = \frac{E}{r\omega} = \frac{E\sqrt{LC}}{r} = \frac{200\sqrt{2\cdot 2\cdot 10^{-12}}}{2} = 2\cdot 10^{-4}$ Кл

Найдем величину заряда в момент времени $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC} = \frac{T}{4}$

$$q = A\sin\frac{\omega T}{4} = A\sin\frac{\pi}{2} = A$$

Ответ: $2\cdot 10^{-4}$ Кл

10. Стратостат вытесняет массу m = 420 кг внешнего холодного атмосферного воздуха с температурой $T_1$ = 270 К. При нагревании воздуха внутри стратостата до температуры $T_2$ = 400 К летательный аппарат отрывается от поверхности земли. Какую массу балласта $\Delta$m надо сбросить со стратостата при остывании воздуха в нем на 10%, чтобы стратостат продолжал находиться в равновесии? Объем стратостата при остывании газа не меняется. (6 баллов)

Решение:

Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует выражение для плотности идеального газа:

$$P = \frac{\rho}{\mu}RT \Rightarrow \rho = \frac{P\mu}{RT}$$

При разных температурах воздуха внутри и снаружи стратостата возникает равновесие силы тяжести и силы Архимеда:

$$m_{\text{тепл}}g + m_{\text{страт}}g - F_{apx} = 0$$

При остывании воздуха в стратостате на 10% температура в нем становится равной $T_3 = 0{,}9\cdot T_2$, а балласт массой $\Delta$m сбрасывают:

$$\frac{P\mu}{RT_2}Vg + Mg - \frac{P\mu}{RT_1}Vg = 0$$

$$\frac{P\mu}{RT_3}Vg + (M - \Delta m)g - \frac{P\mu}{RT_1}Vg = 0$$

Вычитая из нижнего уравнения верхнее, получим

$$\frac{P\mu}{RT_3}Vg - \frac{P\mu}{RT_2}Vg = \Delta mg \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \frac{PV\mu}{R}\left(\frac{1}{0,9\cdot T_2} - \frac{1}{T_2}\right) = \frac{1}{9}\frac{PV\mu}{RT_2}$$

Записав уравнение Менделеева-Клапейрона для холодного воздуха массой m, который был вытеснен стратостатом

$$PV = \frac{m}{\mu}RT_1,$$

получим

$$\frac{PV\mu}{R} = mT_1 \ \Rightarrow \ \Delta m = \frac{1}{9}\frac{mT_1}{T_2} = \frac{420\cdot 270}{9\cdot 400} = 31,5 \text{ кг}$$