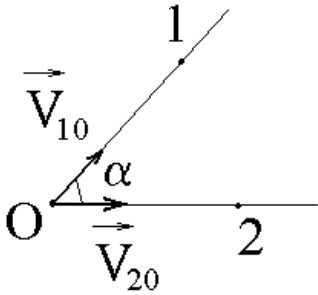


Тульский государственный университет.

Естественнонаучный факультет.

Олимпиада по прикладной физике 12 февраля 2005 г.



1. В момент $t = 0$ точки 1 и 2 находились в вершине O угла $\alpha = 60^\circ$, и движутся вдоль сторон угла: первая точка – равнозамедленно с ускорением $a_1 = 2 \text{ м/с}^2$ и начальной скоростью $v_{10} = 5 \text{ м/с}$, а вторая точка – равноускоренно с ускорением $a_2 = 4 \text{ м/с}^2$ и начальной скоростью $v_{20} = 1 \text{ м/с}$. В какие моменты времени t треугольник, образованный точками 1, 2 и вершиной O будет прямоугольным?

(6 баллов)

Решение:

Перемещения точек 1 и 2 находятся по формулам:

$$x_1 = v_{10} \cdot t - \frac{a_1 t^2}{2} = 5t - t^2;$$

$$x_2 = v_{20} \cdot t + \frac{a_2 t^2}{2} = t + 2t^2.$$

В процессе движения угол $\angle O21$ становится равным 90° , таким образом отрезок $O2$ будет катетом, а $O1$ – гипотенузой, тогда

$$x_2 = x_1 \cos 60^\circ \Rightarrow t + 2t^2 = \frac{1}{2}(5t - t^2);$$

$$5t^2 = 3t \Rightarrow t = 3/5 = 0,6 \text{ с}$$

Далее угол $\angle O12$ становится равным 90° , таким образом уже отрезок $O1$ будет катетом, а $O2$ – гипотенузой, тогда

$$x_1 = x_2 \cos 60^\circ; \quad 5t - t^2 = \frac{1}{2}(t + 2t^2)$$

$$4t^2 = 9t \Rightarrow t = 9/4 = 2,25 \text{ с}$$

Ответ: $t_1 = 0,6 \text{ с};$
 $t_2 = 2,25 \text{ с}.$

2. Самолет совершает мертвую петлю (движется по окружности в вертикальной плоскости) с постоянной скоростью $v = 720 \text{ км/ч}$. Чему равен радиус петли R (в метрах), если в нижней точке траектории летчика прижимает к сидению сила в полтора раза большая, чем в верхней точке? $g = 10 \text{ м/с}^2$.

(4 балла)

Решение:

В верхней точке круговой траектории сила тяжести и сила реакции опоры направлены вертикально вниз, поэтому

$$N_1 + mg = m \frac{v^2}{R}$$

В нижней точке траектории сила реакции опоры направлена вверх, а сила тяжести вниз, поэтому

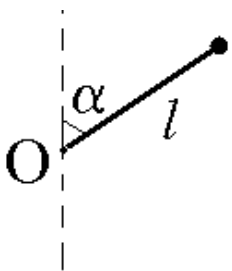
$$N_2 - mg = m \frac{v^2}{R}$$

Выражая N_1 и N_2 из уравнений и подставляя в условие $N_2 = 1,5N_1$, находим радиус траектории:

$$mg + \frac{mv^2}{R} = 1,5 \left(\frac{mv^2}{R} - mg \right);$$

$$2,5mg = 0,5 \frac{mv^2}{R}; \Rightarrow R = \frac{v^2}{5g} = \frac{200^2}{50} = 800 \text{ м}$$

Ответ: 800 м.



3. Стержень длины $l = 80$ см с массой $m = 50$ г, на конце которого укреплен шарик с той же массой m может без трения вращаться вокруг закрепленной горизонтальной оси O . Стержень без начальной скорости отпустили из положения, указанного на рисунке. В положении равновесия суммарная кинетическая энергия точек системы равна $K = 0,9$ Дж. Найти угол α , если $g = 10$ м/с². **(5 баллов)**

Решение:

Из закона сохранения энергии следует

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2,$$

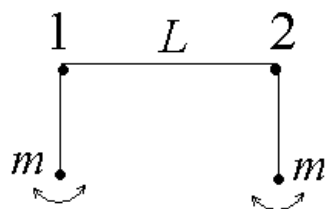
$$\text{где } K_1 = 0, U_1 = 2mg \left(l + \frac{3l}{4} \cos \alpha \right), K_2 = 0,9 \text{ Дж}, U_2 = 2mg \frac{l}{4}.$$

Здесь учтено, что центр масс системы массы $2m$ находится на расстоянии $\frac{3l}{4}$ от точки O , или $\frac{l}{4}$ от конца стержня.

Таким образом

$$2mg \left(l + \frac{3l}{4} \cos \alpha \right) = K_2 + 2mg \frac{l}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2K_2}{3lmg} - 1 = \frac{2 \cdot 0,9}{3 \cdot 0,8 \cdot 0,05 \cdot 10} - 1 = 0,5$$

Ответ: $\alpha = 60^\circ$



4. Невесомая нить перекинута через гвозди 1 и 2, вбитые в стену на расстоянии $L = 1,2$ м друг от друга. К концам нити прикреплены грузики, образующие математические маятники с одинаковыми периодами колебаний. Если нить передвинуть влево на $\Delta l = 24$ см, то период колебания левого маятника станет в 2 раза больше, чем период колебания правого. Найти длину l нити.

(4 балла)

Решение:

Пусть первоначальное расстояние между левым грузом и точкой 1 (а также между правым грузом и точкой 2) равно l_1 . Если передвинуть нить влево на Δl , то длина левого математического маятника станет равной $l_1 + \Delta l$, а правого – $l_1 - \Delta l$. Так как периоды этих математических маятников находятся

по формуле $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 + \Delta l}{g}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 - \Delta l}{g}}$, а соотношение между ними по

условию $T_1 = 2T_2$, то

$$2\pi\sqrt{\frac{l_1 + \Delta l}{g}} = 2 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l_1 - \Delta l}{g}} \Rightarrow l_1 + \Delta l = 4(l_1 - \Delta l)$$

$$3l_1 = 5\Delta l \Rightarrow l_1 = 5\Delta l/3 = 40 \text{ см}$$

$$\text{Длина всей нити } l = L + 2l_1 = 1,2 + 2 \cdot 0,4 = 2 \text{ м}$$

Ответ: 2 м.

5. Углекислый газ (CO_2) в количестве 5 молей совершает процесс, при котором работа, совершаемая газом, задается формулой $A = pV - p_0V_0$, где p, V – давление и объем газа, p_0, V_0 – начальное давление и объем. Чему равна теплоемкость газа при таком процессе? Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/К·моль. **(6 баллов)**

Решение:

Запишем формулу для работы газа при изобарическом процессе:

$$A = p_0\Delta V = p_0V - p_0V_0.$$

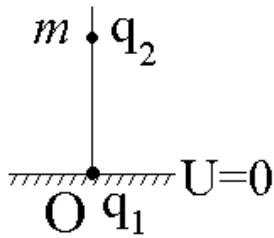
Сравнивая эту формулу с формулой из условия, можно сделать вывод, что газ в данной задаче совершает изобарический процесс. Молярная теплоемкость

изобарического процесса находится по формуле $c = \frac{i+2}{2}R$, где $i = 6$ – число

степеней свободы трехатомного газа. Теплоемкость газа можно найти по

$$\text{формуле } C = \nu c = \nu \frac{i+2}{2}R = 5 \cdot \frac{6+2}{2} \cdot 8,31 = 166,2 \text{ Дж/К}$$

Ответ: 166,2 Дж/К



6. В точке O , в которой закреплен точечный заряд $q_1 = 6$ мкКл, потенциальную энергию гравитационного поля можно принять нулю. По вертикальной линии, проходящей через точку O , может двигаться точечный заряд $q_2 = 8$ мкКл с массой $m = 120$ г. Найдите величину минимальной потенциальной энергии такой системы из двух зарядов. $g =$

10 м/с^2 ; $k = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$.

(5 баллов)

Решение:

Минимальную потенциальную энергию система имеет в положении устойчивого равновесия, когда сила тяжести скомпенсирована силой кулоновского отталкивания.

$$mg = \frac{kq_1q_2}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{kq_1q_2}{mg}}$$

Зная положение заряда q_2 , найдем потенциальную энергию системы:

$$U = mgr + \frac{kq_1q_2}{r} = mg\sqrt{\frac{kq_1q_2}{mg}} + \frac{kq_1q_2}{\sqrt{\frac{kq_1q_2}{mg}}} = 2\sqrt{mgkq_1q_2} =$$

$$2\sqrt{0,12 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 1,44 \text{ Дж}$$

Ответ: 1,44 Дж

7. Цепь состоит из источника постоянного тока с внутренним сопротивлением $r = 4$ Ом и нагрузки с сопротивлением $R = 24$ Ом. Если к той же самой нагрузке подключить батарею из N последовательно соединенных одинаковых источников тока, то тепловая мощность, выделяющаяся на нагрузке, возрастет в N раз. Чему равно N ?

(4 балла)

Решение:

$$P_1 = I_1^2 R = \left(\frac{E}{R+r} \right)^2 R;$$

$$P_2 = I_2^2 R = \left(\frac{NE}{R+Nr} \right)^2 R;$$

$$\frac{P_2}{P_1} = N = \left(\frac{N(R+r)}{R+Nr} \right)^2; \Rightarrow 16N^2 - 592N + 576 = 0; N = 36$$

Ответ: $N = 36$

8. Частица с удельным зарядом $q/m = 2 \cdot 10^{12}$ Кл/кг, ускоренная разностью потенциалов $\Delta\varphi = 64$ В, вылетает из начала координат под углом $\alpha = 60^\circ$ к оси ОХ и движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 2$ мТл, линии которого направлены против оси ОХ. На каком расстоянии от начала координат частица пересечет ось ОХ в первый раз? Ответ округлить до трех значащих цифр.

(5 баллов)

Решение:

Частица в магнитном поле будет двигаться по винтовой линии с радиусом

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}, \text{ периодом обращения } T = \frac{2\pi m}{qB}, \text{ с шагом винтовой траектории}$$

$$h = v \cos \alpha \cdot T = v \cos \alpha \cdot \frac{2\pi m}{qB} = \sqrt{\frac{2q\Delta\varphi}{m}} \cos \alpha \frac{2\pi m}{qB} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^{12} \cdot 64} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2 \cdot 10^{12} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 0,0126 \text{ м}$$

Ответ: 0,0126 м.

9. Круглый замкнутый проводящий виток радиуса $r = 5$ см вращают вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью $\omega = 200$ рад/с в магнитном поле $B = 8$ мТл, линии индукции которого вертикальны. Сопротивление витка $R = 2$ Ом. Переменный электрический ток, возникающий в витке, можно заменить постоянным эффективным (действующим) током I_3 . Чему равна величина I_3 ? **(5 баллов)**

Решение:

$$\text{Поток магнитного поля сквозь виток } \Phi = B\pi r^2 \cos \omega t$$

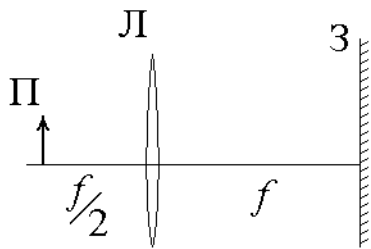
$$\text{По закону электромагнитной индукции Э.Д.С. равна } E = -\frac{d\Phi}{dt} = B\pi r^2 \omega \sin \omega t$$

$$\text{По закону Ома для замкнутой цепи } I = \frac{E}{R} = \frac{B\pi r^2 \omega}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t, \text{ где } I_0 - \text{ амплитуда силы тока. Эффективное значение силы переменного (гармонического) тока}$$

равно $I_3 = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{B\pi r^2 \omega}{R\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \pi \cdot 0,05^2 \cdot 200}{2\sqrt{2}} = 4,44 \cdot 10^{-3} \text{ А}$

$$\text{равно } I_3 = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{B\pi r^2 \omega}{R\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \pi \cdot 0,05^2 \cdot 200}{2\sqrt{2}} = 4,44 \cdot 10^{-3} \text{ А}$$

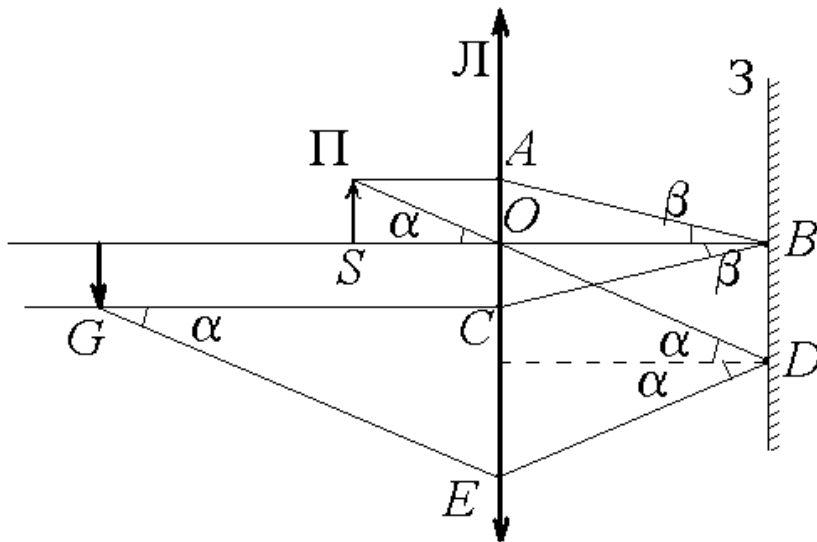
Ответ: 4,44 мА



10. Предмет П находится на расстоянии $f/2$ перед тонкой собирающей линзой Л с фокусным расстоянием $f = 24$ см. За линзой в ее фокальной плоскости установлено плоское зеркало З. Построить изображение предмета в такой оптической системе и найти расстояние от зеркала до изображения.

(6 баллов)

Решение:



Проведем два луча ПА и ПО из вершины предмета П. Параллельный главной оптической луч ПА пересечет главную оптическую ось в точке В, т.е. в фокусе линзы Л. Отраженный луч ВС выйдет из фокуса, а значит после линзы он пойдет параллельно главной оптической оси ОВ.

Луч ПО пройдет через вершину линзы О без преломления и отразится от зеркала в точке D. Отраженный луч DE выходит из точки D в фокальной плоскости, поэтому после линзы луч EG будет параллелен побочной оптической оси OD и пересечет луч CG под углом α . При аксиальных лучах (очень малых углах) угол α можно найти, как

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{OS} = \frac{2h}{f}. \quad \text{Таким образом в треугольнике ODE сторона}$$

$$OE \approx CD \cdot 2\alpha \approx f \cdot 2 \cdot \frac{2h}{f} = 4h. \quad \text{Тогда} \quad CE = 4h - h = 3h, \quad \text{отсюда}$$

$$CG \approx \frac{CE}{\alpha} \approx \frac{3h}{2h/f} = \frac{3f}{2}. \quad \text{Найдем расстояние от зеркала до изображения :}$$

$$GC + OB = \frac{3f}{2} + f = \frac{5}{2}f = 60 \text{ см.}$$

Ответ: 60 см