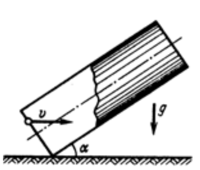
Тульский государственный университет. Олимпиада по физике 18 марта 2001 г.

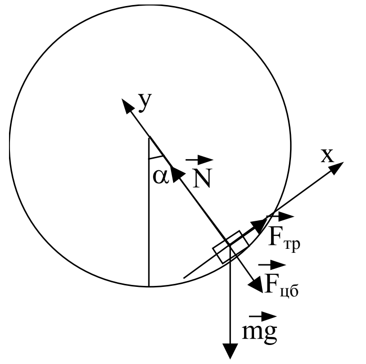


1. В жестко закрепленную трубу длины l, наклоненную под углом α к горизонту, влетает шарик с горизонтальной скоростью υ. Определите время пребывания шарика в трубе, если удары шарика о ее стенки упругие, а диаметр трубы намного меньше ее длины.

4 балла

Решение: Направим ось x вдоль оси цилиндра.Тогда проекция ускорения вдоль этой оси равна $a_x = -g\sin\alpha$. Найдем время, через которое проекция скорости на ось x станет равной нулю : $\upsilon_x = \upsilon\cdot\cos\alpha - g\sin\alpha\cdot t = 0 \;\to\; t = \dfrac{\upsilon\cdot\cos\alpha}{g\sin\alpha}$.За это время шарик успеет сместиться вдоль оси x на расстояние $S = \upsilon\cdot\cos\alpha\cdot t - \dfrac{g\sin\alpha\cdot t^2}{2} = \dfrac{\upsilon^2\cos^2\alpha}{2g\sin\alpha}$. Если $S < l$, то шарик не успеет вылететь из трубы и вернется назад, затратив такое же время. Таким образом время пребывания в трубе будет равно $t_{\text{полн}} = 2t = \dfrac{2\upsilon\cdot\cos\alpha}{g\sin\alpha}$. Если же $S > l$, то шарик успеет вылететь из трубы. В этом случае надо решить квадратное уравнение $l = \upsilon\cdot\cos\alpha\cdot t - \dfrac{g\sin\alpha\cdot t^2}{2}$, из которого находим $t = \dfrac{\upsilon\cdot\cos\alpha \pm\sqrt{\upsilon^2\cos^2\alpha - 2gl\sin\alpha}}{g\sin\alpha}$. Так как время до вылета из трубы должно быть меньше времени, через которое проекция скорости станет равной нулю, поэтому выбираем решение со знаком "–", т.е. $t = \dfrac{\upsilon\cdot\cos\alpha - \sqrt{\upsilon^2\cos^2\alpha - 2gl\sin\alpha}}{g\sin\alpha}$

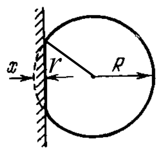
2. С какой угловой скоростью должен вращаться вокруг своей оси горизонтально расположенный цилиндр, чтобы мелкие частицы внутри цилиндра не соскальзывали с его поверхности? Коэффициент трения между поверхностью цилиндра и частицами равен μ=1, внутренний радиус цилиндра R. **3 балла**



Решение: Перейдем в систему отсчета, вращающуюся вместе с цилиндром. Эта система неинерциальная, поэтому надо ввести центробежную силу, направленную от центра против оси y. Если пылинка не скользит по поверхности цилиндра, то сумма всех проекций сил на ось X и Y равна нулю.

$$\begin{matrix} N - mg\cos\alpha - m\omega^2 R = 0 \\ mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = 0 \end{matrix} \;\to\; \begin{matrix} N = m\omega^2 R + mg\cos\alpha \\ F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha \end{matrix}.$$

Как известно, сила трения покоя не может превысить некоторое критическое значение, равное μN, т.е. $F_{\text{тр}} \le \mu N$, поэтому можно записать: $mg\sin\alpha \le m\omega^2 R + mg\cos\alpha$ (мы учли, что μ=1). Отсюда получим оценку угловой скорости: $\omega^2 \ge f(\alpha) = \dfrac{g\sin\alpha - g\cos\alpha}{R}$. Исследуя $f(\alpha)$ на экстремум, находим, что максимальное значение этой функции достигается при угле α=135° и равно $f_{\max} = \sqrt{\dfrac{g\sqrt{2}}{R}}$. Таким образом, если угловая скорость будет больше этого максимального значения, то пылинки не будут скользить по поверхности цилиндра ни при каких углах α.

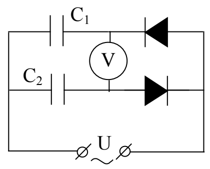


3. Воздушный шарик при слабом ударе о стенку деформируется, как показано на рисунке. При этом максимальная деформация шарика x много меньше его радиуса R. Пренебрегая изменением избыточного давления Δp воздуха в шарике (разностью между давлением внутри и снаружи шарика) и упругостью оболочки, оцените время соударения со стенкой. Масса шарика m. **5 баллов**

Решение: При столкновении площадь соприкосновения шарика со стенкой равна площади круга радиуса r: $S = \pi r^2$, где квадрат радиуса этого круга можно найти по формуле $r^2 = R^2 - (R-x)^2 \approx 2Rx$. Если направить ось x перпендикулярно стене к центру шарика, то уравнение динамики будет выглядить так: $F_x = -\Delta p\cdot S = ma$ или $-\Delta p\cdot\pi\cdot 2R\cdot x = ma$. Видно, что сила действующая на шарик пропорциональна смещению и направлена против смещения. Такое движение аналогично движению грузика массы m на пружинке жесткостью $k = \Delta p 2\pi R$. Тогда период колебаний такого грузика был бы равен $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\Delta p 2\pi R}} = \sqrt{\dfrac{2\pi m}{\Delta p R}}$. Движение от максимальной скорости до первой полной остановки и далее опять до максимальной скорости при гармонических колебаниях займет по времени половину периода. Таим оборазом шарик будет взаимодействовать со стенкой время $t = \dfrac{T}{2} = \sqrt{\dfrac{\pi m}{2\Delta p R}}$.

4. Электроны, обладающие на бесконечности скоростью υ, долго падают на металлический изолированный шар радиуса R. На сколько повысится температура шара, если его теплоемкость равна C, а в начальный момент шар был не заряжен? **5 баллов**

Решение: Учтем, что если на шар попадет N электронов, то он зарядится до потенциала $\varphi = \dfrac{kNe}{R}$, где $k = 9\cdot 10^9\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$. Тогда следующий электрон может остановиться перед самим шаром, потеряв всю кинетическую энергию из-за отталкивания его шаром. При этом шар уже не получит больше ни заряда, ни энергии. Применим закон сохранения энергии для одного электрона, прилетевшего из бесконечности и остановившегося перед шаром: $\dfrac{m\upsilon^2}{2} = e\varphi = \dfrac{keNe}{R} \Rightarrow N = \dfrac{m\upsilon^2 R}{2ke^2}$. Зная количество электронов добравшихся до шара, найдем тепло как разность полной энергии всех этих электронов на бесконечности и на шаре: $Q = N\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{kN^2e^2}{2R} = \left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)^2\frac{R}{ke^2} - \left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)^2\frac{R}{2ke^2} = \left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)^2\frac{R}{2ke^2}$. Здесь надо вспомнить формулу для энергии уединенного заряженного шарового конденсатора: $W = \frac{q^2}{2C_{\text{шара}}}$, и емкость уединенного шара $C_{\text{шара}} = 4\pi\varepsilon_o R = \frac{R}{k}$. Это тепло пойдет на нагревание $Q = C\Delta T$. Отсюда найдем изменение температуры шара $\Delta T = \frac{Q}{C} = \left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)^2\frac{R}{2ke^2C}$

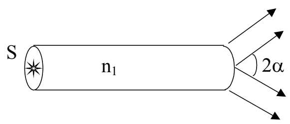


5. Выпрямители, изображенные на рисунке, идеальны, т.е. не имеют сопротивления при пропускании тока в одну сторону и не пропускают ток в другую сторону. Емкости конденсаторов $C_2=2C_1$. На вход в момент t=0 начали подавать напряжение $U=U_o\sin\omega t$ с частотой ν=50 Гц и амплитудой U_o= 4 В. В какой момент времени t величина напряжения, показываемая идеальным вольтметром будет равна 6 В? **3 балла**

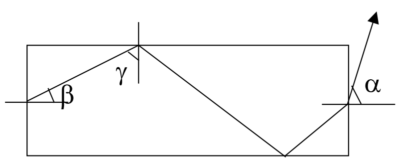
Решение: За первые четверть периода изменения напряжения источника верхний диод будет пропускать ток, а значит положительно заряжаться правая обкладка конденсатора C_1 до напряжения 4 В. Следующие четверть периода тока не будет, так как потенциал слева от верхнего диода будет больше потенциала справа от него, поэтому он запрется и не будет проводить ток. При этом на конденсаторах ничего не изменится. Когда наступает вторая половина периода изменения напряжения на источнике, то открывается нижний диод, но ток течет от конденсатора C_2 слева направо. Поэтому правая обкладка конденсатора C_2 заряжается отрицательно. Чтобы разность потенциалов на вольтметре была равна 6 В, нужно, чтобы C_2 зарядился до 2 В (со знаком "минус"), то есть до половины амплитудного значения U_o. Это произойдет при условии $\cos\omega t = \frac{1}{2}$, т.е. если $\omega t = \pi/3$, или $t = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{1}{6\nu}$. Таким образом время, через которое вольтметр покажет 6 В равно $t = \frac{T}{2} + \frac{1}{6\nu} = \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{6\nu} = \frac{2}{3\nu} = \frac{2}{150}$ с.

6. Имеется проволока с сопротивлением *R*, через которую без риска ее пережечь пропускают ток, не превышающий *I*. Какую наибольшую мощность может иметь электрический нагреватель, изготовленный из этой проволоки, при включении в сеть с напряжением *U << IR?* Проволоку можно разрезать на куски и соединять последовательно и параллельно. **5 баллов**

Решение: Так как напряжение U очень мало, то ток через проволоку течет очень маленький, далеко до предела, при котором он может перегореть. Чтобы увеличить мощность, выделяемую на каждом участке, а тем самым и вцелом, надо разрезать проволоку на части и сложить их параллельно. Тогда через каждую часть будет течь предельный ток, мощность будет максимальна и проволока не перегорит. Найдем минимальное сопротивление куска проволоки, который не перегорит при приложении к нему напряжения U: $R_1 = \frac{U}{I}$. При соединении N одинаковых сопротивлений параллельно, общее сопротивление становится в N раз меньше сопротивления одного куска R_1. Число кусков найдем как $N = \frac{R}{R_1} = \frac{RI}{U}$, тогда $R_{\text{общ}} = \frac{R_1}{N} = \frac{U}{I}\frac{U}{RI} = \frac{U^2}{RI^2}$. Мощность на этом сопротивлении $P = \frac{U^2}{R_{\text{общ}}} = RI^2$



7. Точечный источник света S вплотную приближен к центру плоского основания длинного прозрачного цилиндрического световода с показателем преломления n_1=1,25. Во сколько раз увеличится косинус угла раствора 2α конуса лучей, выходящих из другого основания, если световод изготовить из материала с показателем преломления n_2=1,5? **5 баллов**



Решение:

От источника на основание световода лучи падают под углами в диапазоне от 0 до 90°, а внутрь преломляются под углами от 0 до β, где $\sin\beta = \frac{1}{n}$ (из закона преломления). На боковую поверхность светопровода лучи упадут под минимальным углом γ, который связан с углом β: $\sin\gamma = \cos\beta$. Условие полного внутреннего отражения: $\sin\gamma_{\text{пр}} = \frac{1}{n}$. Сравним $\gamma_{\text{пр}}$ и γ. $\sin\gamma = \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}$. Если *n*=1,25 , то sinγ = 0,6; $\sin\gamma_{\text{пр}}$ = 0,8. Т.к. $\gamma < \gamma_{\text{пр}}$, то часть лучей преломится на боковой поверхности и выйдет наружу, а в световоде будут распространяться те лучи, которые упали под углом больше, чем $\gamma_{\text{пр}}$. Таким образом, на противоположное основание световода лучи упадут под углом от 0 до β_1, где $\cos\beta_1 = \sin\gamma_{\text{пр}} = \frac{1}{n}$. Тогда лучи выйдут из основания под макимальным углом α_1, где $\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1 = n\sqrt{1-\cos\beta_1^2} = n\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{n^2-1}$ = 0,75. Если же n = 1,5, то sinγ = 0,745, $\sin\gamma_{\text{пр}}$ = 0,666. Т.к. $\gamma > \gamma_{\text{пр}}$, то все лучи будут полностью отражаться от боковых поверхностей и выйдут под теми же углами, под которыми вошли, т.е. максимальный угол α_2 = 90°. Тогда получим ответ: $\frac{\cos 2\alpha_2}{\cos 2\alpha_1} = \frac{\cos 180^o}{1-2\sin^2\alpha_1} = \frac{-1}{1-2\cdot 0{,}75^2} = 8$ раз.

8. Сосуд объемом V с теплоизолированными стенками разделен на две части <u>свободным</u> теплоизолированным поршнем, по обе стороны которого находятся разные количества разного одноатомного газа при разных начальных температурах. Найти объем V, если для увеличения давления в правой части сосуда на $\Delta p=10^5$Па в левую часть надо сообщить тепло Q=83,1 кДж? **4 балла**

Решение:

Первое начало термодинамики для левой части сосуда: $Q = \Delta U_1 + A_1 = \frac{i}{2}\nu_1 R\left(T_1 - T_{01}\right) + A_1$.

То же для правого сосуда: $0 = \Delta U_2 + A_2 = \frac{i}{2}\nu_2 R\left(T_2 - T_{20}\right) - A_1$. Здесь учтено, что первый газ совершал работу над вторым газом, что равно отрицательной работе второго газа над первым. Таким образом

$$(*)\quad Q = \frac{i}{2}\nu_1 R\left(T_1 - T_{01}\right) + \frac{i}{2}\nu_2 R\left(T_2 - T_{02}\right).$$

Используя уравнение состояния идеального газа, получим:

$$(**)\quad \begin{array}{l} \nu_1 R\left(T_1 - T_{01}\right) = pV_1 - p_0 V_{01} \\ \nu_2 R\left(T_2 - T_{02}\right) = pV_2 - p_0 V_{02} \end{array}.$$

Здесь учтено, что как до, так и после нагревания давления в двух частях сосуда одинаковы. Сложим левые и правые части системы уравнений (**) и получим:

$$(***)\quad \nu_1 R\left(T_1 - T_{01}\right) + \nu_2 R\left(T_2 - T_{02}\right) = p\left(V_1 + V_2\right) - p_0\left(V_{01} + V_{02}\right) = \left(p - p_0\right)V.$$

Здесь учтено, что сумма объемов двух частей сосуда не меняется и равна объему сосуда.

Из (*) и (***) получим: $Q = \frac{i}{2}\left(p - p_0\right)V$ и ответ $V = \frac{2Q}{i\Delta p} = 0,554$ м^3.

9. Почему по примеру Мюнхгаузена нельзя поднять себя за волосы, но сидя на стуле и не касаясь пола можно проскакать из одного угла комнаты в другой. Объяснить с помощью законов физики. **3 балла**

Решение:

Переместить стул вдоль комнаты может только внешняя сила (сила трения). Резко дергаясь вперед, седок создает силу трения скольжения, направленную вперед (если двигаться медленно, то будет трение покоя). Под действием этой силы центр масс системы перемещается вперед, стул начнет скользить и сила трения скольжения, поменяв направление, тормозит движение. Затем рывок следует повторить.

10. Что произойдет с частотой звука, издаваемого духовыми и струнными инструментами, если понизить температуру окружающего воздуха? Объяснить. **3 балла**

Решение:

В духовых инструментах устанавливается стоячая звуковая волна, длина которой пропорциональна размеру инструмента: $\lambda = \frac{\upsilon_{зв}}{\nu} \sim l$. А так как с понижением температуры Т скорость звука $\upsilon_{зв}$ в газах убывает, то частота звучания ν также убывает.

В струнных инструментах длина стоячей волны также пропорциональна длине струны l, но скорость звука пропорциональна натяжению струны, которое увеличивается с ростом Т. Соответственно возрастает частота ν.